

# Sur les corrections de la géométrie thermodynamique des trous noirs.

Bhupendra Nath Tiwari \*

Department of Physics,  
Indian Institute of Technology,  
Kanpur-208016, India.

## Abstract

We study thermodynamic geometry of certain black holes and black branes with and without generalized uncertainty principle or stringy  $\alpha'$ -corrections to the entropy. From this perspective, we analyze Ruppeiner geometry of Reissner-Nordström black holes and show that it is well defined and corresponds to a non-interacting statistical system. We investigate that the Weinhold geometry of dilatonic black holes is regular everywhere and that of large mass Reissner-Nordström black holes in the Poincaré patch of  $AdS_4$  contains certain narrow range of thermodynamically unstable regions in the statespace. We obtain that the generalized uncertainty principle corrected Ruppeiner geometry of Reissner-Nordström black holes correspond to a non-interacting statistical system unlike the magnetically charged black holes. We show that the stringy  $\alpha'$ -corrections do not introduce singularity in the statespace geometry of non-supersymmetric extremal black holes in  $D = 4$ . Interestingly, the degree of scalar curvature and that of the determinant of this Ruppeiner geometry can be written as an integer multiple of the order of  $\alpha'$ -correction. We further show that the statespace geometry of Gauss- Bonnet corrected supersymmetric extremal black holes in  $D = 4$  as well as non-extremal  $D_1D_5$  and  $D_2D_6NS_5$  black branes in  $D = 10$  is regular everywhere. Furthermore, the thermodynamic geometry of four dimensional rotating Kerr-Newman extremal black holes in Einstein-Maxwell theory is everywhere ill-defined and that of the Kaluza-Klein black holes in Einstein-Maxwell theory or the one arising from heterotic string compactification is ill-defined only at the points of the ergo-branch.

**Keywords:** Thermodynamic Geometries, Higher Derivative Gravity, Generalized Uncertainty Principle, Black Hole Physics .

**PACS numbers:** 04.70.-s: Physics of black holes; 04.70.Dy: Quantum aspects of black holes, evaporation, thermodynamics; 11.25.-w: Strings and branes .

---

\*bntiwari@iitk.ac.in

# Table des matières

1. Introduction.
2. L'origine de la géométrie thermodynamique.
3. Les géométries thermodynamiques des trous noirs:
  - 3.1 La géométrie de Ruppenier des trous noirs de Reissner-Nordström.
  - 3.2 La géométrie de Wienhold des trous noirs dilatoniques.
  - 3.3 La géométrie de Wienhold des solutions de  $M_2$ -branes:  
Les trous noirs de Reissner-Nordström dans la nappe de Poincaré d' $ADS_4$ .
4. Les corrections de  $l_P$  dans la géométrie thermodynamique:
  - 4.1 La géométrie de Ruppenier des trous noirs de Reissner-Nordström.
  - 4.2 La géométrie de Ruppenier des trous noirs chargés magnétiquement.
- 5 Les corrections d' $\alpha'$  dans la géométrie thermodynamique:
  - 5.1 La géométrie de Ruppenier des trous noirs dyoniques extrémaux supersymétriques en quatre dimensions.
  - 5.2 La géométrie de Ruppenier des trous noirs dyoniques extrémaux non-supersymétriques en quatre dimensions.
  - 5.3 L'Observation: La nature de la courbure scalaire de Ruppenier d'après les corrections d' $\alpha'$  des trous noirs dyoniques extrémaux non-supersymétriques en quatre dimensions.
6. La géométrie de Ruppenier des solutions non-extrémales de branes  $D_1D_5$  et  $D_2D_6NS_5$  en dimensions  $D = 10$ :
  - 6.1 La géométrie de Ruppenier des solutions non-extrémales de branes  $D_1D_5$ .
  - 6.2 La géométrie de Ruppenier des solutions non-extrémales de branes  $D_2D_6NS_5$ .
7. La géométrie de Ruppenier des trous noirs extrémaux en rotation en quatre dimensions:
  - 7.1 Les trous noirs de Kerr-Newman dans la théorie d'Einstein-Maxwell.
  - 7.2 Les trous noirs de Kaluza-Klein dans la théorie d'Einstein-Maxwell.
  - 7.3 Les trous noirs de la théorie des cordes hétérotiques compactifiée toroidalement.
8. Remarques et conclusions.
9. Les appendices:
  - L'annexe A: La géométrie thermodynamique de Ruppenier pour les trous noirs avec deux paramètres.
  - L'annexe B: La géométrie thermodynamique de Ruppenier pour les trous noirs avec trois paramètres.
  - L'annexe C: La géométrie thermodynamique de Ruppenier pour les trous noirs dyoniques extrémaux non-supersymétriques.

Mots-clés: Les géométries thermodynamiques, la théorie de la gravité des dérivées supérieures, le principe d'incertitude généralisée, la physique des trous noirs ou branes noirs .

# 1 Introduction:

Motivés par la méthode de la fonction de l'entropie et le principe d'incertitude généralisée, nous examinons la géométrie thermodynamique associée à l'entropie ou à la masse des différents trous noirs ou branes noirs. Nous avons considéré une série de systèmes de trous noirs et analysons leur géométrie thermodynamique. Notre perspective de l'étude géométrique est divisée en deux parties: la première est les corrections dans l'entropie des trous noirs en raison du principe d'incertitude généralisée et la seconde est les corrections supérieures à l'entropie des trous noirs par la méthode de la fonction de l'entropie [1].

Les propriétés thermodynamiques, du trou noir de la théorie des cordes, sont élégamment résumées par l'assignement d'une entropie du trou noir [2]. Il existe une structure riche dans le cadre des trous noirs demi-BPS dans les théories des supercordes en  $\mathcal{N} = 2$  et  $D \geq 4$ , par le biais de certaines compactifications des dimensions supérieures des théories des supercordes. En raison de la compactification, certains champs scalaires apparaissent dans la théorie, avec des valeurs proche de l'horizon sont déterminées uniquement par les charges portées par le trou noir. Les valeurs proches de l'horizon sont donc indépendantes de leur valeur asymptotique. Ces champs scalaires constituent l'espace de modules scalaires sur lesquels l'entropie des trous noirs est indépendante [1, 3, 4, 5, 6]. Ces trous noirs, des supercordes compactifiées, ont le pouvoir d'être liés au système dynamique par ce mécanisme attracteur. C'est-à-dire les équations de la structure complexe appelées les équations d'attracteur pour les charges, ont certaines conditions sur les structures d'Hodge de la variété complexe, particulièrement avec le tore  $T_6$  ou la variété de Calabi-Yau.

En revanche, l'entropie des différents trous noirs dépend des termes dérivés supérieures se figurant dans le prepotential généralisé [7, 8, 9, 10]. De plus, dans certain cas, la partie réelle de l'espace des modules scalaires des multiples vecteurs est proportionnelle aux champs magnétiques, alors que la partie imaginaire est proportionnelle aux champs électriques à l'horizon du trou noir [1, 10]. Cette propriété de dépendance de l'entropie des trous noirs des termes dérivés supérieures peut être codée dans le nombre de la deuxième classe de Chern de l'espace topologique sous-jacent sur lequel la théorie des supercordes est compactifiée. En outre, à proximité de l'horizon des trous noirs de la théorie des supercordes de  $\mathcal{N} = 2$ , il est bien connu que tous les termes de la densité lagrangienne s'éclipsent, à l'exception d'un seul terme proportionnel à la partie imaginaire du prepotential généralisé. L'une des plus intéressantes corrections de la densité lagrangienne dans le cas de la courbure carré de l'espace-temps à l'aire de l'horizon des trous noirs, est le terme:  $4\pi Im(\Upsilon F_\Upsilon)$  [7, 8, 9, 10].

Comme il est désormais bien connu, la méthode de la fonction de Sen de l'entropie est la meilleure méthode pour calculer les contributions d' $\alpha'$  des dérivées supérieures d'une classe de trous noirs découlant des théories des cordes. Un exemple de base de notre compréhension du mécanisme attracteur et de l'entropie d'un trou noir extrémal avec les charges électriques et magnétiques, est la solution de Reissner-Nordström. Cette solution décrit un trou noir chargé et sphériquement symétrique, dans les quatre dimensions de la théorie d'Einstein-Maxwell. Il s'agit d'une solution classique exacte pour toute distance finie  $r$  qui décrit une sphère ordinaire  $S^2$  de deux dimensions et un espace-temps bidimensionnel connu  $AdS_2$ . Donc, cette solution décrit également la gravité d'Einstein en deux dimensions avec une valeur négative de la constante de cosmologie.

De plus, cette situation a une isométrie de  $SO(3)$  agissant sur la sphère  $S^2$ , qui reflète la symétrie sphérique du trou noir original et est présente également dans la solution complète de ce trou noir. Elle a également une isométrie de  $SO(2,1)$  agissant sur l'espace d' $AdS_2$ , alors qu'elle n'était pas présente initialement dans

la solution complete de ce trou noir. Dans ce cas, il est facile de montrer que la métrique et les champs de jauge peuvent être écrits invariablement par la transformation de  $SO(2, 1) \times SO(3)$ . En fait, cette manière de définir un trou noir extrémal fonctionne en général bien avec les dérivées supérieures de la théorie de la gravité. En particulier,  $\langle\langle$  dans toute la théorie de la gravité généralement covariante et conjuguée aux champs de la matière, la géométrie proche de l'horizon d'un trou noir extrémal présentent une symétrie de la sphère en quatre dimensions a l'isométrie de  $SO(2, 1) \times SO(3)\rangle\rangle$  [11, 12].

En outre, l'entropie des trous noirs extrémaux chargés et en rotation est bien connue dans la théorie des cordes hétérotiques depuis très longtemps [13]. Sen et.al. considèrent que dans la théorie générale de la gravité des dérivées supérieures, qui est conjuguée aux champs de jauge et aux champs scalaires neutres, l'entropie ainsi que l'arrière-plan proche de l'horizon d'un trou noir extrémal en rotation, peuvent être déterminés par extrémisation de la fonction d'entropie de Sen. Actuellement, il ne dépend que des paramètres de caractérisation de l'horizon comme par exemple, les charges électriques, les charges magnétiques et le moment cinétique du trou noir. Toutes les solutions de trous noirs extrémaux, comme dans le cas du trou noir extrémal de Kerr-Newmann ou celui de Kaluza-Klein dans la théorie d'Einstein-Maxwell, ou bien aussi des trous noirs extrémaux découlant de la théorie des cordes hétérotiques compactifiée toroidalement, ont également deux types différents de limites extrémales que l'on appelle la branche d'ergonomie et la branche d'ergonomie libre. Dans la limite extrémale correspondante à la branche d'ergonomie, l'expression de l'entropie du trou noir extrémal de la théorie des cordes hétérotiques compactifiée toroidalement peut être obtenue par la méthode de la fonction de l'entropie qui est donnée par  $S(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J) := 2\pi\sqrt{J^2 + P_1Q_2P_3Q_4}$ , où  $P_1, P_3$  et  $Q_2, Q_4$  sont respectivement les charges électriques et magnétiques dans la théorie des cordes hétérotiques tronquée [14]. Il est également bien connu que cette entropie est invariante par transformation de la dualité dans le cadre d'une transformation de  $SO(2, 2)$  pour les vecteurs des charges électriques et magnétiques caractérisant la solution du trou noir.

Nous pourrions bien sûr refaire le même genre de calcul dans le cas des trous noirs ou branes noirs non-extrémaux. Pour cela, on a démontré que le formalisme de la fonction de l'entropie fonctionne bien pour certains cas spéciaux des trous noirs non-extrémaux et également pour des branes noirs non-extrémaux, malgré le fait que l'horizon de ces branes n'est pas attracteur. Selon l'explication du mécanisme d'attracteur considéré par Kallosh et.al.[15], la distance physique à partir d'un point arbitraire de l'horizon attracteur est infinie. Explicitement, au niveau de la supergravité, cette distance propre d'un point arbitraire de l'horizon est finie ou infinie, selon le cas de trous noirs considérés comme trou noir non-extrémal ou trou noir extrémal. Par exemple, on a démontré que la fonction de l'entropie a un extremum proche de l'horizon d'un trou noir extrémal [16, 17]. C'est-à-dire, le formalisme de la fonction de l'entropie ne doit pas être quelque chose de spécifique pour les trous noirs extrémaux. On a aussi spéculé que le formalisme de la fonction de l'entropie est utilisable pour les trous noirs/ branes non-extrémaux, dont les géométries proches de l'horizon sont des extensions de l'espace d'AdS, comme le trou noir de Schwarzschild dans AdS [18]. Maintenant, compte tenu des corrections spécifiques des dérivées plus élevées des contributions du tenseur de Weyl, comme les corrections des termes dérivés supérieurs de la théorie effective. Ensuite, pour les cas des termes dérivés plus élevés qui respectent la symétrie des solutions au niveau de l'arbre, l'entropie de ces systèmes de branes est donnée par la valeur de la fonction de l'entropie aux extremums. En outre, les corrections d' $\alpha'^3$  n'ont pas d'effets sur la température du système thermodynamique sous-jacente, mais elles diminuent la valeur de l'entropie [16, 19]. En fait, Pour incorporer les corrections d' $\alpha'$  à l'entropie d'un trou noir ou brane noir, la méthode de la fonction de l'entropie de Sen est une des techniques les

plus efficaces. Cela n'exige pas que la fonction de l'entropie doit avoir un minimum local à proximité de l'horizon.

D'autre part, afin de décrire les structures de l'espace-temps à petite échelle de manière adéquate, une extension de la mécanique quantique pourrait être nécessaire. Et afin de tenir compte de la gravité, nous avons besoin de modifier la géométrie classique continue, voir par exemple la géométrie non-commutative de Connes [20]. Et bien, le principe d'incertitude généralisée peut être analysé à travers les concepts de base de la limite et de la transformation de Fourier. Ensuite, la gravité quantique ou la théorie des cordes peut être étudiée dans la perspective d'une fonction complexe, avec certaines modifications des conditions quantificatives dans la théorie quantique. En particulier, on peut décrire le principe d'incertitude généralisée de la théorie des cordes aux conditions d'analyticité d'une certaine fonction complexe selon le mélange d'UV/IR [21]. Cette considération est fondée sur le fait que l'échelle de Planck est la longueur minimale de la nature; ainsi, il existe une longueur maximale de la nature.

En outre, l'existence des symétries de la dualité non-perturbative de la théorie des cordes indique que les théories des cordes ne distinguent pas les petites échelles de l'espace-temps à partir des grandes échelles de l'espace-temps. Cela nécessite une modification du principe d'incertitude d'Heisenberg, comme par exemple pour les énergies au-delà de l'échelle de Planck, la taille de la corde grandit avec le temps au lieu de chuter. À la suite de la théorie des cordes, une introduction sur cette description de l'espace-temps T-duale est donnée par Witten [22, 23], où en dessous de la longueur de Planck, le concept même de l'espace-temps change son sens et le principe d'incertitude d'Heisenberg a besoin d'être modifié. Le principe d'incertitude généralisée est aussi motivé par l'étude du comportement pour les petites distances de la théorie des cordes [24, 25, 26, 27], la physique des trous noirs [28] et les espaces de de-Sitter [29]. On peut révéler des indices thermodynamiquement importants avec les corrections existantes dans la nature mais aussi l'origine géométrique de la M-théorie fondamentale [30, 31].

De plus, l'analyse des perturbations linéarisées des trous noirs de Reissner-Nordström du grand anti-de Sitter en quatre dimensions est importante pour avoir la dichotomie de la physique des trous noirs, comme l'instabilité thermodynamique. Par exemple, au cours des dernières années, on a exposé l'existence de certains modes tachyoniques de ces trous noirs [32, 33]. En outre, dans la limite de grands trous noirs, il existe un écart, et lorsque ce trou noir devient thermodynamiquement instable, le tachyon apparaît dans le grand espace d'anti-de Sitter. Il y a eu des progrès remarquables dans la compréhension de la mécanique statistique microscopique compte tenu de la thermodynamique des trous noirs, en utilisant les constructions de la théorie des cordes comme les D-branes [34]. Il y a une règle générale pour les solutions des trous noirs quasi-extrémaux obtenus par les compactifications aux dimensions  $D = 4, 5$  de la théorie des cordes avec plusieurs charges électriques, magnétiques et une masse saturant presque la limite de BPS, qui ont sans exception une chaleur spécifique positive. C'est parce que la mécanique statistique de l'entropie repose sur une théorie des champs des D-branes de basse énergie à partir de laquelle les trous noirs sont construits [35, 36, 37, 38, 39, 40].

Dans le prolongement de ces trous noirs les plus pertinentes dans la théorie des cordes comme les trous noirs d'astrophysiques, une étape naturelle examiner les variantes des trous noirs thermodynamiquement instable pour lesquels la théorie des cordes donne une description duale de la théorie des champs conformes. Le plus simple exemple d'une telle solution est la solution de Reissner-Nordström dans l'espace d'AdS. Cette solution démontre son instabilité thermodynamique et que la solution est instable dans une analyse linéarisée [41]. On a aussi conjecturé dans le passé qu'il existe une relation générale entre l'instabilité thermodynamique et l'instabilité de Gregory-Laflamme pour les branes noirs [42, 43]. Voir pour plus de

détails dans le cas de l'évolution des trous noirs instables dans l'espace d'anti-de Sitter [32, 33].

Dans l'étude géométrique de la thermodynamique, il existe deux types de géométries thermodynamiques. L'une dans la représentation de l'entropie qui s'appelle la géométrie de Ruppenier et l'autre dans la représentation de la masse qui est dite la géométrie de Wienhold. En fait, il est bien connu que ces deux géométries thermodynamiques sont liées par une transformation conforme avec le facteur conforme à la température du système considéré [44, 45]. De cette manière, nous pouvons calculer la métrique de la géométrie thermodynamique dans n'importe quelle représentation et puis l'obtenir dans l'autre représentation seulement en tenant compte du facteur de la température. C'est-à-dire que les enquêtes d'une géométrie sont équivalentes à celles de l'autre. Donc, nous pouvons obtenir la métrique d'une géométrie par une autre déjà connue, et ainsi calculer facilement les quantités géométriques dans la représentation souhaitée. C'est pourquoi dans la plupart des cas de notre étude, nous avons analysé le rôle des corrections de la géométrie thermodynamique que nous avons examiné, soit pour la géométrie de Ruppenier, soit pour la géométrie de Wienhold.

Dans l'article [46], nous avons déjà analysé la géométrie thermodynamique des trous noirs de BTZ. Nous avons montré que l'espace d'état n'a pas d'interactions thermodynamiques et la courbure scalaire de Ruppenier est partout nulle, et ceci reste également le cas avec les corrections de Chern-Simons. De plus, les interactions thermodynamiques sont finies et non nulles lorsque les petites fluctuations thermiques de l'ensemble canonique sont prises en compte. Cela reste le cas avec une petite courbure scalaire de Ruppenier, pour des trous noirs de BTZ ou bien ceux de BTZ-Chern-Simons, si bien qu'on choisit le paramètre de rotation  $J = 0$ , voir [46] pour le détails. Hormis cela, nous avons étudié la géométrie de Ruppenier de certains trous noirs et branes noirs extrémaux. Nous avons montré que la géométrie thermodynamique des branes noirs  $D_1 D_5$  et  $D_2 D_6 N S_5$  extrémaux en  $D = 10$  découlant de la théorie des cordes de type-II, et les petits trous noirs en  $D = 4$  découlant de la théorie des cordes hétérotiques, est bien définie [47]. Ensuite, il est analysé que la courbure scalaire de Ruppenier est partout régulière, et la nature reste inchangée, si on ajoute les corrections d' $\alpha'$ . Bien que la correction d' $\alpha'$  de l'ordre premier modifie l'entropie des petits trous noirs, la géométrie thermodynamique n'est pas bien définie, mais les corrections d' $\alpha'$  des ordres supérieurs la rendent bien définie et partout régulière.

Dans cet article, nous étudions la géométrie thermodynamique et les effets des corrections des dérivées supérieures de la géométrie thermodynamique. En particulier, nous étudions les corrections de la géométrie thermodynamique due au principe d'incertitude généralisée, et celles en raison des corrections d' $\alpha'$  de la théorie des cordes. Le reste de l'article est organisé en plusieurs sections. La première section introduit les problèmes et les motivations. Dans la section 2, nous avons examiné les origines de la géométrie thermodynamique dans la mécanique statistique. Nous avons expliqué que la géométrie thermodynamique se pose naturellement dans l'approximation gaussienne de la fonction de partition des grandes canoniques, alors que l'ensemble des canoniques a seulement la transformation de l'échelle. Dans la section 3, nous avons analysé la géométrie thermodynamique de certains trous noirs et branes noirs dans la théorie des cordes. De plus, nous avons donné une reformulation du problème en termes de l'énergie libre topologique du trou noir et ainsi de la fonction de partition de trou noir. Ceci est comptable pour le cas des petits trous noirs que l'ensemble doit être un ensemble mélangé. En particulier, nous considérons la géométrie de Ruppenier des trous noirs de Reissner-Nordström et également la géométrie de Wienhold des trous noirs dilatoniques et de la solution de Reissner-Nordström dans la nappe de Poincaré d' $ADS_4$ . Dans la section 4, nous avons incorporé les corrections dues au principe d'incertitude

généralisée dans la géométrie thermodynamique. Ici, nous analysons la géométrie de Ruppenier corrigée par le principe d'incertitude généralisée pour le cas de trous noirs de Reissner-Nordström et celui des trous noirs chargés magnétiquement.

Dans la section 5, en prenant les corrections d' $\alpha'$  de la théorie des cordes, nous considérons la géométrie de Ruppenier corrigée par les termes d' $\alpha'$  des trous noirs extrémaux dans  $D = 4$ . Nous avons montré que dans le cas des trous noirs non-supersymétriques, les corrections d' $\alpha'$  d'ordre différents n'introduisent pas la singularité dans la courbure de Ruppenier, et le sous-espace d'état est partout régulier. Cela est également vrai pour les corrections des trous noirs supersymétriques extrémaux dans  $D = 4$  de Gauss-Bonnet. En outre, nous avons observé une tendance bien définie pour la courbure scalaire de Ruppenier et pour le déterminant de la métrique comme le polynômes. Aussi, il est intéressant de noter que le degré de ces courbures de Ruppenier et des déterminants peuvent être déterminés par l'ordre supérieur des corrections d' $\alpha'$ , à tous les ordres d' $\alpha'$  plus grand qu'un. Dans la section 6, nous examinons la géométrie de Ruppenier des branes noirs  $D_1D_5$  et  $D_2D_6NS_5$  non-extrémaux en  $D = 10$  et montrons que ces systèmes thermodynamiques sont partout réguliers et bien définis. Dans la section 7, nous concentrons notre attention sur les trous noirs en rotation, obtenus à partir de la théorie des cordes. Nous avons expliqué que la courbure sous-jacente de Ruppenier diverge aux succursales d'ergo et en ces points, la géométrie thermodynamique devient mal définie. Enfin, la section 8 contient des questions et des remarques de conclusion pour l'avenir.

## 2 L'origine de la géométrie thermodynamique:

Dans cette section, nous allons tout d'abord faire une petite introduction de la géométrie thermodynamique. Et le but de cette section est principalement de placer les notations et les conventions qui seront suivies dans le reste de cet article. Commençons en considérant les dispositifs de base nécessaires de la mécanique statistique pour expliquer les concepts géométriques thermodynamiques [48, 49]. Nous montrons que la géométrie thermodynamique découle naturellement de la théorie des ensembles.

Il est bien connu que la fonction de cloison de l'ensemble canonique est  $\mathcal{Z} = \sum_E e^{-\frac{E}{kT}} = \int \Gamma(E) e^{-\frac{E}{kT}} dE = \int e^{-\frac{1}{kT}\{E-TS(E)\}} dE$ , où  $\Gamma(E)$  est le nombre des micro-états entre l'énergie  $E$  et  $E + dE$  avec l'hypothèse du Boltzmann:  $S = k \ln \Gamma(E)$ . Puisque  $E - TS \sim \heartsuit(N)$  ainsi pour  $N \rightarrow \infty$ , l'intégral est dominé par le minimum de  $E - TS$ . La condition d'un minimum de  $E - TS$  est à obtenir à  $E = \bar{E}$  par  $1 = T(\frac{\partial S}{\partial E})_{\bar{E}}$ . C'est la relation qui définit la température  $T^{-1} = (\frac{\partial S}{\partial E})_{\bar{E}}$  et bien c'est une relation thermodynamique entre l'entropie et la température, donc  $\bar{E}$  est l'énergie thermodynamique. L'expansion de Taylor de  $E - TS(E)$  à  $\bar{E}$  est simplement,  $E - TS = \bar{E} + E - \bar{E} - TS(\bar{E}) - T(\frac{\partial S}{\partial E})_{\bar{E}}(\Delta E) + \frac{T}{2}(\frac{\partial^2 S}{\partial E^2})_{\bar{E}}(\Delta E)^2 + \heartsuit((\Delta E)^3) + \dots = \bar{F} - \frac{T}{2} \frac{\partial}{\partial E}(\frac{1}{T})(\Delta E)^2 = \bar{F} + \frac{(\Delta E)^2}{2TC}$ , où  $\bar{F} = \bar{E} - TS(\bar{E})$  est l'énergie libre, c'est-à-dire,  $\bar{F}$  est une valeur minimum de  $(E - TS)$  quand la correction est positif ce qui se produit ssi  $C > 0$ . En d'autres termes, l'intégral est dominé ssi la chaleur spécifique  $C$  est positive. Donc,  $\mathcal{Z} = e^{-\frac{\bar{F}}{kT}} \int e^{-\frac{\Delta E^2}{2kT^2C}} dE$ . Il implique que la distribution canonique correspond à une fluctuation gaussienne avec de l'énergie thermodynamique moyenne. On peut voir facilement,  $\mathcal{Z} \sim \heartsuit(\sqrt{C}) \sim \heartsuit(\sqrt{N})$  qui entraîne,  $\ln \mathcal{Z} = -\frac{\bar{F}}{kT} + \ln(\heartsuit(\sqrt{N}))$ . Dans la limite thermodynamique,  $\ln(\heartsuit(\sqrt{N}))$  ne domine pas parce que  $-\frac{\bar{F}}{kT} \sim \heartsuit(N)$ . Enfin, on a une relation entre la mécanique statistique et la thermodynamique qui sont représentés respectivement par  $\mathcal{Z}$  et  $F$ . Cette relation est donnée par l'énergie libre thermodynamique  $\bar{F} = kT \ln \mathcal{Z}$ .

De la même manière, la fonction de cloison de l'ensemble grand canonique est donné par  $\mathcal{Q} = \int \Gamma(E, N) e^{-\frac{1}{kT}(E-\mu N)} dE dN$ , où  $\Gamma(E, N)$  est le nombre des états

avec  $E, N$ . On peut écrire facilement,  $\mathcal{Q} = \int e^{-\frac{1}{kT}(E-TS-\mu N)} dE dN$ . Dans la limite,  $N \rightarrow \infty$ , l'intégral va dominer par le minimum de  $(E-TS-\mu N)$ , à qui les conditions extrêmes sont:  $T^{-1} = (\frac{\partial S}{\partial E})_{V,N}$  et  $\mu = T(\frac{\partial S}{\partial N})_{V,E}$ . On peut résoudre ces équations avec les solutions:  $E = \bar{E}, N = \bar{N}$ . Écrivant  $(E-TS-\mu N) = \bar{E} - \mu \bar{N} - TS(\bar{E}, \bar{N}) - \frac{T}{2} \{ (\frac{\partial^2 S}{\partial E^2})_{N,V} (\Delta E)^2 + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial E \partial N} (\Delta E \Delta N) + (\frac{\partial^2 S}{\partial N^2})_{E,V} (\Delta N)^2 + \dots \} = -PV + \frac{T}{2} \{ \alpha (\Delta E)^2 + 2\beta (\Delta E \Delta N) + \gamma (\Delta N)^2 \}$ , où  $\bar{E}, \bar{N}$  sont les valeurs thermodynamiques des  $E, N$ . Nous avons défini  $\alpha := (\frac{\partial^2 S}{\partial E^2})_{N,V}, \beta := (\frac{\partial^2 S}{\partial E \partial N})_V$  et  $\gamma := (\frac{\partial^2 S}{\partial N^2})_{E,V}$ . Pour avoir le minimum du  $(E-TS-\mu N)$ , la forme quadratique dans la parenthèse  $\{..\}$  doit être définie positive, ce qui est ainsi, ssi  $\alpha > 0, \beta > 0$  et  $\alpha\gamma > \beta^2$ . Donc  $\mathcal{Q} = e^{\frac{PV}{kT}} \int d(E - \bar{E}) d(N - \bar{N}) e^{\frac{1}{2k} \{ \alpha (\Delta E)^2 + 2\beta (\Delta E \Delta N) + \gamma (\Delta N)^2 \}}$ . À la mesure,  $N \rightarrow \infty$ , nous avons:  $kT \ln \mathcal{Q} = PV + \heartsuit(\ln \sqrt{N})$ . Ainsi la distribution grande canonique est une distribution quadratique des fluctuations dans  $E$  et  $N$ . En d'autres termes, la distribution grande canonique est équivalente à une distribution gaussienne des fluctuations dans l'énergie et le nombre de particules.

Et bien, les lois thermodynamiques ne sont pas fondamentales mais elles viennent des propriétés microscopiques du système. Dans ce cas, nous voyons trivialement,  $TdS = dE + PdV - \mu dN$  où l'entropie joue un rôle important. Si la dépendance de l'entropie  $S(U, V, N)$  aux variables  $U, V, N$  est connue alors la connaissance complète de tous les paramètres thermodynamiques peut être obtenue. En effet, il est facile de voir que l'entropie du système caractérise les fluctuations thermiques de l'énergie et du nombre de particules du système. Définissons,  $ds^2 := \alpha dE^2 + 2\beta dE dN + \gamma dN^2$  avec  $g_{ij}(x) = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \beta & \gamma \end{pmatrix}$  où  $x := \begin{pmatrix} E \\ N \end{pmatrix}$ . On peut observer que la  $g_{ij}$  est symétrique et positive définie pour toute la variable thermodynamique  $x \in R^2$ . L'entropie statistique d'un système est  $S = k_B \ln \Gamma(U, V, N)$ , où  $\Gamma$  représente le nombre quantique de tous les constituants des sous-ensembles. Nous avons  $\Gamma = 1$  si il n'y a aucun désordre.

De plus, pour un corps macroscopique dans l'équilibre, les quantités physiques ont généralement de petites déviations de leurs valeurs moyennes. Nous pouvons trouver une distribution de probabilité de ces fluctuations thermiques en considérant  $\Gamma = e^S$  comme un commencement de la théorie de fluctuation. Soit le  $P$  une distribution de probabilité, c'est-à-dire que  $P \propto e^S$ . En particulier, considérons la distribution gaussienne de plusieurs quantités thermodynamiques et leurs fluctuations simultanées de leurs valeurs moyennes. Nous pouvons définir l'entropie  $S(x_1, x_2, \dots, x_n)$  d'un corps macroscopique dans l'équilibre dépendant sur  $\{x_i\}$  avec leur déviations par l'expansion du Taylor jusqu'à deuxième ordre:  $S = S_0 - \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n g_{ij} x^i x^j$ , où la métrique de Ruppenier  $g_{ij}$  est définie par  $g_{ij} := -\frac{\partial^2 S}{\partial x^i \partial x^j}$  [44, 45, 46, 47, 50, 51, 52]. Ainsi la distribution de probabilité peut être écrite simplement:  $P = A e^{-\frac{1}{2} g_{ij} x^i x^j}$ , avec la normalisation  $\int \prod_{i=1}^n dx_i P(\{x_j\}_{j=1}^n) = 1$ . Il est facile d'obtenir:  $A = \frac{\sqrt{g}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}$  avec  $g = \|g_{ij}\|$ , donc nous avons:  $P = \frac{\sqrt{g}}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}} e^{-\frac{1}{2} g_{ij} x^i x^j}$ . Définissons, l'élément de la ligne entre les deux états arbitraires d'équilibre qui est donnée par  $ds^2 := \sum_{i,j} g_{ij} dx^i dx^j$ . Ainsi  $X_i = \frac{\partial S}{\partial x^i} = g_{ij} x_j$ , puis les fonctions de corrélation de paire sont  $\langle x_i x_j \rangle = g^{ij} = \langle X_i X_j \rangle$ . Nous appellerons  $\{X_i\}$  comme variables thermodynamiques et assignons  $g_{ij}$  pour être la métrique parce que  $X^i$  est conjugué à  $x^i$ . Nous pouvons obtenir les propriétés thermodynamiques en limitant nous-même, aux coordonnées qui sont des paramètres extensives de la thermodynamique ordinaire. C'est un modèle géométrique qui est basé sur l'inclusion de la théorie des fluctuations dans les axiomes de la thermodynamique d'équilibre. Cette géométrie  $(\mathcal{M}, g)$  est appelée la géométrie thermodynamique de Ruppenier. C'est la géométrie dans laquelle les états d'équilibre peuvent être représentés par les points de la variété riemannienne  $(\mathcal{M}, g)$  et la distance entre ces points d'équilibre est liée à



la fluctuation thermique entre eux. De cette façon, nous pouvons avoir une relation entre la géométrie et la probabilité, en particulier,  $\langle\langle$  moins probable  $\rangle\rangle$  signifie que  $\langle\langle$  dans le lointain  $\rangle\rangle$ .

Nous considérons la géométrie de Ruppenier des systèmes de trous noirs. Cette géométrie donne une méthode directe pour analyser les points critiques des trous noirs. Cette méthode géométrique est un domaine important de la recherche courante pour comprendre la thermodynamique d'un trou noir. Les observations sont importantes parce que la courbure scalaire thermodynamique de Ruppenier est proportionnelle au volume de la corrélation qui signifie l'interaction du système statistique fondamental. C'est à dire que, soit  $\xi$  est longueur de corrélation puis on a  $R \sim \xi^d$ , où  $d$  est la dimension spatiale du système statistique [44]. En fait, c'est la base d'un modèle géométrique qui est basée sur l'inclusion de la théorie de fluctuations dans les axiomes de la thermodynamique d'équilibre. C'est pourquoi, dans ce modèle géométrique qui est lié à la probabilité, on a un élément de la ligne entre les deux états d'équilibre avec la métrique  $g_{ij} = -\partial_i \partial_j S(x^1, \dots, x^n)$ . Dans le cas particulier, il existe les états d'équilibre qui peuvent être représentés par des points dans la bidimensionnelle surface  $\mathcal{M}_2$  et la distance entre les points arbitraires de la variété  $\mathcal{M}_2$  est liée aux fluctuations entre les états correspondants d'équilibres.

### 3 Les géométries thermodynamiques des trous noirs:

Dans cette section, nous avons analysé la thermodynamique d'équilibre des systèmes de trous noirs possèdent intéressantes caractéristiques géométriques. En effet, la géométrie thermodynamique peut être appliquées pour étudier la nature de l'entropie des trous noirs qui sont chargés soit électriquement, soit magnétiquement, soit les deux. Et surtout, le produit intérieur de l'espace d'état thermodynamique d'équilibre dans la représentation d'énergie a été fournie par Weinhold, ainsi que la matrice d'Hessien de l'énergie intérieure, en respectant la vaste thermodynamique des variables a été déjà expliquée dans l'introduction. Après tout, les corrections thermiques disparaissent dans la limite thermodynamique où les entropies canonique et micro-canonique d'un trou noir deviennent identiques. Bien que l'origine statistique de l'entropie des trous noirs est encore incertaine, il va de soi que d'un trou noir en équilibre avec le rayonnement thermique d'Hawking à un terme fixe de la température d'Hawking est décrit par un ensemble canonique. Nous allons maintenant discuter de la géométrie thermodynamique des trous noirs avec plusieurs charges. Parce que l'entropie de trou noir est la valeur de l'extremum de la fonction de l'entropie. C'est pourquoi, la géométrie thermodynamique des trous noirs peut être déterminée par référence à l'ensemble canonique par la fonction de l'entropie à des points fixe de l'attracteur. En particulier, l'enquête de la géométrie thermodynamique covariante de Ruppeiner des trous noirs peuvent être mise en lumière des aspects intéressants comme la transitions de phase et les géométries de l'espace des modules de trou noir. De toute manière, dans la suite de cette section, nous ferons une brève introduction sur les trous noirs, puis nous introduirons la géométrie thermodynamique par la fonction de cloison de trou noir et ainsi l'énergie libre des cordes topologiques. Ce sont deux outils que nous pouvons également utiliser avec l'aide de la conjecture d'OSV, donc nous concluons en parlant du lien entre trous noirs et les géométries thermodynamiques.

Nous savons qu'un trou noir est une solution classique de la relativité générale, qui peut être pensé comme un point-particule de la très grande masse. Comme, tout le trou noir ont grande force d'attraction et la même que la lumière ne peut pas aussi l'échapper. Ce fait conduit à la notion d'un événement horizon d'un trou noir, dont pas une particule physique peut le franchir. Dans les années 1970, Hawking et Bekenstein ont constaté par la voix de la mécanique quantique [53, 54, 55] que le

trou noir est un objet thermique avec certaine temperature non-zéro. Comme tout les systèmes thermiques, un trou noir vient avec certaine entropie liée à la domaine de l'événement horizon, ce qui est donné par la formule célèbre:  $S_{BH} = A/4$ . En outre, du point de vue de la mécanique statistique, cette entropie est liée à un problème de comptage pour l'ensemble de charges avec certaine énergie fixe ou celle de la masse. Précisément, la relation est donnée par  $S_{micro} = \ln \Omega(\vec{Q}, \vec{P}, M)$ , où  $\Omega(\vec{Q}, \vec{P}, M)$  est la dégénérescence d'états avec diverses charges électriques, magnétiques et la masse  $M$  du système. En d'autres termes, un trou noir a l'entropie qui réponde jusqu'à la deuxième loi de la thermodynamique. De plus, Les systèmes ayant une plus grande entropie sont thermodynamiquement plus susceptibles de subvenir à la nature.

Souvenons-nous, comment un trou noir peut être comprise à partir des notions de la théorie des cordes. Il est bien connu que les particules élémentaires sont caractérisées par les états vibrationnels d'une corde. En outre, il n'y a que cinq théories des cordes cohérentes, en particulier du type-I, du type-IIA, du type-IIB, hétérotique  $E_8 \times E_8$  et hétérotique  $SO(32)$ ; qui tous vivent dans les dimensions d'espace-temps  $D = 9 + 1$  [56, 57]. Pour venir à l'observations physiques des dimensions  $(3 + 1)$ , nous utilisons la procédure de la compactification pour les six dimensions intérieures et donc les six dimensions compactifiées ne sont pas vues dans les accélérateurs presents. De plus, chacun de ces spectres de la théorie des cordes contient le graviton, qui est le médiateur de la gravité. Comme nous le savons qu'une corde peut être pensée d'une collection d'oscillateurs harmoniques de nombre infini et chaque corde a d'états quantiques ou excitations d'un nombre infini. C'est-à-dire, la quantification d'une corde donne la tour infinie des états qui peuvent être décrits les différentes particules élémentaires. Et en particulier, les états d'une grande masse ne sont pas observables dans les expériences des laboratoires.

Maintenant, pour avoir une idée de la dégénérescence, on peut la définir comme le nombre d'états ayant certaine énergie ou celle de la masse fixe. On sait que la dégénérescence augmente rapidement, dont la masse est augmentée. Pour l'ensemble de diverses charges électriques et magnétiques  $(\vec{Q}, \vec{P})$  caractérisant le système statistique, l'entropie de comptage associée au système est définie comme:  $S_{micro} = \ln \Omega(\vec{Q}, \vec{P}, M)$ . Une importante question pour demander est: Est-ce que  $S_{micro} = S_{BH} \in R$ ? Pour avoir une réponse, nous allons examiner la théorie des cordes hétérotiques qui soit  $E_8 \times E_8$  soit  $SO(32)$  avec certains nombre d'enroulement  $w$  enroulée sur un tore. En général, cela correspond au nombre des modes de gauche et ceux de droites de la théorie des cordes qui se déplacent avec les conditions périodiques de la frontière des champs bosoniques. En outre, ces modes de gauche et ceux de droites peuvent s'affronter et s'annihiler au temps ce qui correspond à un système instable. C'est la compréhension microscopique d'instabilités thermodynamiques en termes d'états élémentaires d'une corde hétérotique. Afin d'examiner les états stables, nous devons considérer seulement l'états en mouvement des gauches ou ceux d'états de droites, ce que l'on appelle les états de BPS.

Ces états sont décrites par deux nombres quantiques: le nombre d'enroulement  $w$  et l'élan total porté par oscillation  $n/k, n \in Z$ . C'est à dire qu'on a un simple problème de la quantification d'une particule dans une boîte. Ici, les  $w$  et  $n$  sont les deux nombres quantiques qui nivelent le niveau d'états quantiques d'une corde hétérotique. Maintenant, soit  $\Omega(n, w)$  le nombre d'états avec des nombres quantiques  $w$  et  $n$ . Puis, dans la limite des grandes charges:  $w, n \rightarrow \infty$ , la corde hétérotique comporte comme un trou noir avec la dégénérescence des états [58]:  $\Omega(n, w) = \exp(4\pi\sqrt{nw})$ . C'est-à-dire, l'entropie de comptage ou de la mécanique statistique est juste:  $S_{micro} = 4\pi\sqrt{nw}$ . Afin d'avoir une compréhension microscopique d'un trou noir à partir de la théorie des cordes, nous avons besoin de  $S_{micro} = S_{BH}$ .

Il n'est pas surprenant qu'il existe les différentes corrections, par exemple: (i) les corrections d' $\alpha'$  qui arrivent dû au fait que les cordes ne sont pas des points-particules, et seulement aux grandes distances, la corde se comporte comme un point-particule. (ii) les corrections quantiques qui arrivent par la considération que la gravité elle-même, est une théorie quantique et pas seulement une théorie de la supergravité. C'est-à-dire qu'un trou noir est un objet quantique. En fait, le champ de dilaton définit le paramètre de ces effets quantiques, comme  $1/\sqrt{nw}$ . Bien que, les effets quantiques sont très faibles dans la limite des grandes charges, mais les corrections d' $\alpha'$  sont d'ordre de l'unité. En fait, dans cette limite, Sen a montré que les symétries des cordes heterotiques classiques avec les corrections d' $\alpha'$  donnent lieu à:  $S_{micro} = a\pi\sqrt{nw}$ , où le paramètre  $a$  dépend sur les corrections d' $\alpha'$ . Par conséquent, nous voyons que la théorie des cordes fournit une explication microscopiques de la théorie des trous noirs. En fait, ces trous noirs considérés sont uniquement électriquement chargées et ce sont appelés les petits trous noirs. Dans ce cas, Sen a également montré qu'au niveau d'arbre d' $\alpha'$ , l'entropie macroscopique des petits trous noirs est:  $S_{BH} = A/4 = 0$ , pour le détails voir [59]. En revanche, nous considérons maintenant les trous noirs avec  $S_{BH} = A/4 \neq 0$  qui sont chargés électriquement et magnétiquement [34, 60]. Dans ce cas, le comptage microscopique comporte sur certains D-branes et on peut récupérer dans la limite des grands charges que  $S_{micro} = S_{BH}$  [35, 36, 37, 38, 39, 40]. Maintenant sans la charge magnétique:  $p = 0$ , on a  $S_{BH} = 0$  qui coïncide avec les petits trous noirs chargées électriquement découlant de la théorie des cordes hétérotiques.

Donc, la théorie effective d'énergie faible de la supergravité de  $\mathcal{N} = 2$  interagissante avec le multiple vecteurs suivants de la théorie des cordes implique qu'on a les corrections de la courbures supérieures. Les effets des dérivées supérieures modifient la loi d'aire d'Hawking-Bekenstein et introduisent les corrections d'ordres supérieures à l'entropie thermodynamique des trous noirs. À l'échelle macroscopique, l'entropie résulte par le traitement de Walds de la gravité des courbures supérieures généralement covariantes, comme une intégrante de la surface d'horizon du trou noir par une densité de la charge de Noether. En outre, les corrections des dérivées supérieures sont encodées dans le prepotential généralisé qui est une fonction homogène, holomorphes des deux degrés des champs scalaires rescaladés et la partie de l'anti-selfdual du champ graviphoton. Le mécanisme attracteur continue à tenir en présence des dérivées supérieures et une application de l'analyse de Walds donne l'entropie macroscopique du trou noir. De plus, les équations d'attracteurs peuvent être résolues, et afin de déterminer les champs scalaires en termes des charges, ce qui garantit à l'horizon que l'entropie macroscopique est seulement une fonction des charges. Comme, nous avons expliqué, les solutions de trous noirs tombent dans deux distinctes catégories: les grands trous noirs qui ont une zone non-nulle lors au niveaux des deux dérivées, et les petits trous noirs qui ont une zone nulle et transportent uniquement des charges électriques. Pour les grands trous noirs de la théorie des cordes de type-IIA compactifiée sur une variété de Calabi-Yau, on a une description en termes de certains des branes sur les cycles non-triviaux. L'entropie microscopique est alors déterminé en termes de comptage de micro-états par la formule de Cardy dans la théorie bidimensionnelle des champs conformes de la frontière sous-jacente associées à ces branes. Ceci est perturbativement en accord avec la précision d'ordonnance de l'entropie macroscopique. De plus, on a une reformulation du problème en termes de l'énergie libre topologique du trou noir lié au logarithme de la fonction de partition de trou noir qui indique dans le cas des petits trous noirs que l'ensemble doit être un ensemble mélangé.

En fait, il est vraiment intéressant de savoir, qu'elles sont les significations thermodynamiques: (a) De la méthode de la fonction d'entropie fournissant certaines équations d'attracteur ou d'unattracteur en présence des termes dérivés supérieurs de l'espace-temps. (b) des équations d'attracteurs sous la méthode de la fonction

d'entropie mènent pendant que l'EOM et l'autre viennent pendant que l'état de SUSY. En général, ceux-ci sont les équations qui peuvent nous mener à comprendre un ensemble possible associé au trou noir correspondant. Plus rigoureusement, les équations d'attracteurs pour le trou noir de BPS dans  $\mathcal{N} = 2, D = 4$  avec l'aide d'OSV définissent la fonction de cloison pour le trou noir correspondant par:  $\mathcal{Z}_{BH}(p, \phi) := |\exp f_{top}(p + \frac{i}{2}\phi)|^2 = |\mathcal{Z}_{top}|^2$ . C'est à dire que pour tout le prepotential  $F$ , l'entropie du trou noir  $S_{BH}(\vec{p}, \vec{q})$  est égal à la transformation de Legendre d'une fonction  $f$ , ce qui est définie par  $f = \text{Im}(F)|_{\text{attracteur}}$  aux points d'attracteur. Donc,  $S_{BH}(\vec{p}, \vec{q}) = f(\vec{e}, \vec{p}) - e^I \frac{\partial}{\partial e^I} f(\vec{e}, \vec{p})$ , où  $\forall \vec{Q} = (\vec{q}, \vec{p})$  et les potentiels électriques sont définis par  $e^I := -\frac{\partial}{\partial q_I} S_{BH}(\vec{p}, \vec{q})$  ou  $q_I = \frac{\partial}{\partial e^I} f(\vec{e}, \vec{p})$ . Ainsi, l'ensemble correspondant des trous noirs external est un ensemble mélangé [6].

De même, ce système est un ensemble microcanonical du point de vue magnétique dont les  $p$  sont maintenues fixe, tandis qu'on a besoin d'employer l'ensemble canonique pour les charges électriques avec les potentiels électriques  $e^I$ . Et ainsi, nous définissons une fonction mélangée de cloison pour ces trous noirs par  $\mathcal{Z}_{BH}(\vec{e}, \vec{p}) = \sum_{\vec{q}} \Omega(\vec{p}, \vec{q}) e^{\vec{e} \cdot \vec{p}}$ , où  $\Omega(\vec{p}, \vec{q})$  est un nombre entier qui définit la dégénérescence de trou noir. De cette façon nous avons:  $\mathcal{Z}_{BH}(\vec{e}, \vec{p}) = \sum_{\vec{q}} e^{\ln \Omega(\vec{p}, \vec{q}) + \vec{e} \cdot \vec{p}} = e^{f(\vec{e}, \vec{p})}$  où  $f(\vec{e}, \vec{p}) = S_{micro}(\vec{p}, \vec{q}) + \vec{e} \cdot \vec{p}$ . Puisque  $\mathcal{Z}_{BH}(\vec{e}, \vec{p})$  est une fonction mélangée de cloison, tellement a priori il n'est pas assez clair, que la fonction  $f(\vec{e}, \vec{p})$  puisse être interprétée comme énergie libre du trou noir ou pas. N'importe comment, l'entropie microscopique de trou noir est donnée par  $S_{micro} = \ln \Omega(p^I, q_I)$ . Donc, la dégénérescence peut être obtenue en tant que la transformation inverse de Laplace pour être:  $\Omega(\vec{p}, \vec{q}) = \int e^{f(\vec{e}, \vec{p}) - \vec{e} \cdot \vec{p}} d\vec{e}$ , où  $d\vec{e} := \prod_I de^I$  est une mesure produit. Nous pouvons noter pour les trous noirs grand qu'on peut utiliser à l'approximation de point-selle entraîne:  $S_{micro}(p^I, q_I) = S_{BH}(p^I, q_I)$ .

Nous savons que l'énergie libre des cordes topologiques peut être identifiée avec la fonction de cloison de trou noir [6]. Ainsi nous pouvons écrire l'énergie libre  $\mathcal{F}(p, \phi)$  et la fonction de cloison  $\mathcal{Z}_{BH}(p, \phi)$  par  $\pi \mathcal{F}(p, \phi) = \ln \mathcal{Z}_{BH}(p, \phi)$ . Nous avons par la transformation de Legendre,  $S_{macro}(p, q) := \pi(\mathcal{F}(p, \phi) - q_I \phi^I)$  où  $q_I := \frac{\partial \mathcal{F}}{\partial \phi^I}$  puis il existe une fonction holomorphe dans  $\phi$  tels que la fonction de cloison de trou noir peut écrire:  $\mathcal{Z}_{BH}(p, \phi) = \sum_q \Omega(p, q) e^{iq_I \phi^I} = e^{\pi \mathcal{F}(p, \phi)}$ . C'est l'énergie libre qui définit thermodynamiquement la fonction de cloison de l'ensemble canonique en considérant le volume occupé dans l'espace de  $\Gamma$  qui est simplement donné par  $\mathcal{Q}_N(V, T) := e^{-\frac{1}{k_B T} \mathcal{F}(V, T)}$ , par exemple l'énergie libre de Helmholtz est définie par  $\mathcal{F} := M - TS$  où  $T := \frac{\partial M}{\partial S}$ . Nous pouvons écrire simplement la transformation inverse de Legendre,  $\mathcal{F} = \phi \cdot q + S$  avec  $\phi_I = -\frac{\partial S}{\partial q^I}$ . Ainsi, l'élément de la ligne de la géométrie thermodynamique peut être paramétrisée en termes d'énergie libre topologique:  $ds^2 = \frac{1}{k_B} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial Q^i \partial Q^j} dQ^i dQ^j$  où nous avons pris  $\vec{Q} = (\vec{q}, \vec{p})$ . Donc, la métrique  $g_{ij}^{\mathcal{F}}$  est définie par  $g_{ij}^{\mathcal{F}} := \frac{1}{k_B} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial Q^i \partial Q^j}$ . Dans le cas des deux variables, nous

pouvons écrire que cette métrique est  $g^{\mathcal{F}} = \frac{1}{k_B} \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial p^2} & \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \phi \partial p} \\ \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \phi \partial p} & \frac{\partial^2 \mathcal{F}}{\partial \phi^2} \end{pmatrix}$ . Nous pouvons

également donner la métrique en termes de fonction de cloison  $\mathcal{Z}_{BH}$  parce que nous savons  $\mathcal{F}(p, \phi) = \frac{1}{\pi} \ln \mathcal{Z}_{BH}(p, \phi)$ . Donc, il est facile de voir qu'en cette terme la métrique peut être donnée par

$$g^{\mathcal{Z}} := \frac{1}{\pi k_B \mathcal{Z}_{BH}^2} \begin{pmatrix} \mathcal{Z}_{BH} \partial_p \partial_p \mathcal{Z}_{BH} - (\partial_p \mathcal{Z}_{BH})^2 & \mathcal{Z}_{BH} \partial_\phi \partial_p \mathcal{Z}_{BH} - \partial_p \mathcal{Z}_{BH} \partial_\phi \mathcal{Z}_{BH} \\ \mathcal{Z}_{BH} \partial_\phi \partial_p \mathcal{Z}_{BH} - \partial_p \mathcal{Z}_{BH} \partial_\phi \mathcal{Z}_{BH} & \mathcal{Z}_{BH} \partial_\phi \partial_\phi \mathcal{Z}_{BH} - (\partial_\phi \mathcal{Z}_{BH})^2 \end{pmatrix}.$$

Il est bien connu que la fonction de cloison  $\mathcal{Z}_{BH}(p, \phi)$  des trous noirs soit associée à la théorie des cordes topologiques, à la géométrie de Calabi Yau, à l'AdS/CFT, à l'holographie ... etc [35, 36, 37, 38, 61]. C'est pourquoi nous avons le grand intérêt d'analyser les significations et les interprétations géométriques et thermodynamiques en termes des  $\mathcal{Z}_{BH}$  ou bien  $\mathcal{F}$ . En particulier, il est vraiment une

question importante à la mode, qu'elles sont les significations thermodynamiques des equations d'attracteur en présence des dérivées supérieures de l'espace-temps?

De plus, les résultats de l'entropie macroscopiques et ceux de microscopiques pour les petites corrections d' $\alpha'$  sont perturbativement les mêmes et ainsi nous devons avoir:  $S_{BH} > A/4 + \dots$ , où  $\dots$  représentent les corrections d' $\alpha'$  à l'entropie macroscopiques. Pour le cas de zéro magnétique charge, Dabholker a montré que dans la limite des grands charges, nous avons [62]:  $S_{state} = 4\pi\sqrt{nw}$ . Pour ces petits trous noirs des deux charges, nous avons analysé la géométrie thermodynamique des différents ordres de corrections d' $\alpha'$ , voir [47] pour le détails. Nous avons démontré que la géométrie thermodynamique des petits trous noirs corrigée par les dérivées supérieures au premier ordre des corrections d' $\alpha'$  est mal définie. Cependant, avec les prochaines ordre des corrections d' $\alpha'$ , la géométrie thermodynamique des petits trous noirs est bien définie et l'espace de l'état est partout ordinaire. Dans l'analyse des branes noirs extrémaux  $D_1D_5$  et  $D_2D_6NS_5$ , nous trouvons que la géométrie thermodynamique de ces branes est bien définie et la courbure de Ruppenier reste partout finie avec ou sans les corrections d' $\alpha'$ . Maintenant, dans la suite de cet article, nous allons analyser la géométrie thermodynamique des trous noirs de Reissner-Nordström, des trous noirs dilatoniques topologiques, des trous noirs de Reissner-Nordström dans la nappe de Poincaré d' $ADS_4$ , des trous noirs de Reissner-Nordström corrigé par le principe d'incertitude généralisée et celle des trous noirs magnétisés. Ensuite, nous allons voir les corrections d' $\alpha'$  des trous noirs dyoniques extrémaux supersymétriques et celle des non-supersymétriques, des solutions non-extrémaux de branes  $D_1D_5$  et  $D_2D_6NS_5$ , des trous noirs extrémaux en rotation comme les trous noirs extrémaux de Kerr-Newman dans la théorie d'Einstein Maxwell, les trous noirs extrémaux de Kaluza-Klein dans la théorie d'Einstein-Maxwell et les trous noirs extrémaux de la théorie des cordes hétérotiques compactifiée toroidalement. Nos résultats sont éclairantes et sont en accord avec la thermodynamique et mécanique statistique des trous noirs et branes noirs.

### 3.1 La géométrie de Ruppenier des trous noirs de Reissner-Nordström.

Dans cette sous-section, nous analysons la géométrie de Ruppenier d'un trou noir de Reissner-Nordström. C'est le plus simple système de trou noir pour lequel il est facilement possible d'analyser la géométrie thermodynamique. Du point de vue de la thermodynamique des trous noirs, l'enquête de la géométrie thermodynamique covariante de Ruppeiner peut être appliquée pour étudier la nature de l'entropie des trous noirs de Reissner-Nordström. Cela a été explorée pour la première fois dans le contexte des configurations de trous noirs extrémaux chargés de BPS de la supergravité de  $\mathcal{N} = 2$  [63]. Ensuite, plusieurs auteurs ont essayé de comprendre ce sujet [52, 64, 65, 66], à la fois pour des trous noirs supersymétriques, et ainsi que celui des non-supersymétriques. Les trous noirs chargés extrémaux de la supergravité de  $\mathcal{N} = 2$  interagissant avec le multiple vecteurs et celui du multiples hypers sont décrits par la métrique de Reissner-Nordström. Ce sont les BPS-solitons de l'interpolation entre les espaces asymptotiquement plat de Minkowski et celui de la géométrie proche de l'horizon de Bertotti-Robinson. Du mécanisme attracteur, l'entropie macroscopique des trous noirs est déterminée uniquement, comme une fonction des charges du trou noir et donc est indépendant de la valeur asymptotique des modules de champs. Cette solution a un point fixe d'attracteur qui est atteint à l'horizon du trou noir. Et ainsi, l'aire de l'horizon du trou noir est définie par extremum de la charge centrale d'espace des modules.

De toute manière, l'entropie est une fonction de la masse et des charges électriques et magnétiques du trou noir. Cela correspond à l'entropie d'Hawking-Bekenstein aux deux dérivés. De plus, ce système est un exemple typique d'un trou noir

extrémal sphériquement symétrique dans quatre dimensions sans avoir à proximité de l'horizon singulier, la géométrie de l'horizon est  $AdS_2 \times S^2$ . Et donc, le trou noir de Reissner-Nordström a une symétrie de  $SO(2,1) \times SO(3)$ . Dans la théorie d'Einstein-Maxwell en quatre dimensions, nous savons par la fonction de l'entropie de Sen que l'entropie du trou noir de Reissner-Nordström est donnée par [11]:  $S_{BH}(q, p) = \frac{1}{4}(p^2 + q^2)$ . Ainsi, la métrique tenseur covariante thermodynamique de Ruppenier pour le trou noir de Reissner-Nordstrom est donnée par:  $g_{ij}(x) := -\frac{\partial^2 S(x)}{\partial x^i \partial x^j} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}$ . Dans ce cas, le premier résultat est immédiat que le déterminant du tenseur métrique est:  $g = 1/4$  et bien aussi les symboles de Christoffel sont trivialement nuls. Donc, on voit très simplement que la courbure scalaire de Ruppenier est aussi nulle. En conclusion, cette géométrie thermodynamique est bien définie et décrit un système statistique sans interactions.

### 3.2 La géométrie de Wienhold des trous noirs dilatoniques.

Dans cette sous-section, nous étudions une famille de trous noirs en gravitation. Dans le cadre des théories de la gravitation dilatonique inspirées par les théories des cordes, nous considérons les effets thermodynamiques de quelques nouvelles solutions de trous noirs ou branes noires asymptotiquement non-plates. Puis nous calculons leurs effets thermodynamiques comme l'interaction, la transition de phase,..., etc dans les systèmes des trous noirs. Ici, les tous ce qu'il nous concerne, sont les produits et accessoires de la géométrie thermodynamique, voir l'annex [A] pour la géométrie de Ruppenier d'une famille de trou noir des deux paramètres.

Ici, nous considérons maintenant la géométrie thermodynamique des trous noirs chargés dilatoniques topologiques. En particulier, nous expliquons une autre géométrie pour le cas de ces trous noirs dilatoniques topologiques, qui est associée conformément à la géométrie de Ruppenier. Cette géométrie thermodynamique s'appelle la géométrie de Wienhold. Afin de faire ceci, considérons  $(n+1)$  dimensionnelle arbitraire gravité dilatonique d'Einstein-Maxwell pour  $\forall n \geq 3$ . En fait, nous avons besoin d'obtenir la masse  $M$  comme une fonction des quantités extensives  $S, Q$  et alors, nous avons un type de formule de Smarr, donné par [67]:  $M(S, Q) = -\frac{k(n-1)(n-2)(\alpha^2+1)b^{-\alpha^2}}{16\pi(\alpha^2-1)(\alpha^2+n-2)}(4S)^{\frac{\alpha^2+n-2}{n-1}} + \frac{\Lambda}{8\pi} \frac{(\alpha^2+1)b^{\alpha^2}}{\alpha^2-n}(4S)^{\frac{n-\alpha^2}{n-1}} + \frac{2\pi(\alpha^2+1)b^{\alpha^2}}{\alpha^2+n-2}Q^2(4S)^{\frac{\alpha^2+n-2}{1-n}}$ , où  $k$  détermine la nature de l'horizon de trou noir ou celui d'horizon cosmologique. En particulier, les valeurs de  $k = 0, 1, -1$  sont respectivement des hypersurfaces de courbure constantes plates, elliptiques et hyperboliques. La  $\alpha$  est une constante d'accouplement du dilaton,  $b$  est une constante arbitraire et paramètre libre  $\Lambda := -\frac{n(n-1)}{2l^2}$  joue le rôle de la constante de cosmologie.

De plus, nous pouvons bien sûr étudier la stabilité des trous noirs dilatoniques topologiques. La stabilité d'un système thermodynamique avec les petites fluctuations thermiques est analysé par le comportement de l'entropie  $S(Q, M)$  autour d'équilibre. Pour avoir la stabilité locale dans n'importe quel ensemble, nous exigeons que  $S(Q, M)$  doit être une fonction convexe des variables extensives. En d'autres termes, c'est la transforme de Legendre où  $M$  doit être une fonction concave des variables intensives. La stabilité est également bien obtenue par le comportement de l'énergie  $M(S, Q)$  en ce qui concerne les variables extensives, ce qui dans ce cas-ci devrait être une fonction convexe. Ainsi la stabilité locale en principe peut être analysée en obtenant le déterminant de la matrice d'Hessien de la masse  $M(S, Q)$  avec les variables extensives. En considérant  $S$  et  $Q$  comme ensemble complet des variables extensives pour la masse  $M(S, Q)$ , nous pouvons définir les paramètres intensifs conjugués aux  $S$  et  $Q$  qui sont respectivement associées à la température  $T$  et au potentiel électrique  $\phi$ , ce qui sont donnés par  $T := (\frac{\partial M}{\partial S})_Q$ ,  $\phi := (\frac{\partial M}{\partial Q})_S$  et se satisfont facilement la première loi de la thermody-

namique:  $dM = TdS + \phi dQ$  [68].

En cette case, considérant  $\forall x^a = (S, Q) \in \mathcal{M}_2$ , comme une paramétrisation de la masse  $M(S, Q)$  avec la métrique  $g_{ab} := \frac{\partial^2}{\partial x^a \partial x^b} M(S, Q)$ , alors l'élément de la ligne pour cette variété thermodynamique  $(\mathcal{M}_2, g)$  peut être écrite comme:  $ds^2 = (\frac{\partial^2 M(S, Q)}{\partial S^2})dS^2 + 2(\frac{\partial^2 M(S, Q)}{\partial S \partial Q})dSdQ + (\frac{\partial^2 M(S, Q)}{\partial Q^2})dQ^2$ . Alors que la masse de ce trou noir chargé dilatonique topologique est donnée par un formule de Smarr, ci-dessus. Il est facile d'obtenir que les composantes de la métrique de Wienhold sont:

$$\begin{aligned} g_{SS} &= \frac{k(n-2)(\alpha^2+1)b^{-\alpha^2}(1-\alpha^2)}{16\pi(\alpha^2-1)S^2(n-1)}(4S)^{\frac{\alpha^2+n-2}{n-1}} + \frac{\Lambda(\alpha^2+1)b^{\alpha^2}(n^2-\alpha^2)(n^2-\alpha^2-n+1)}{8\pi(\alpha^2-1)(n-1)^2S^2}(4S)^{\frac{n^2-\alpha^2}{n-1}} + \\ &\frac{2\pi b^{\alpha^2}(\alpha^2+1)Q^2(\alpha^2+2n-3)}{(1-n)^2S^2}(4S)^{\frac{\alpha^2+n-2}{1-n}}, \\ g_{SQ} &= \frac{4\pi b^{\alpha^2}(\alpha^2+1)Q}{(1-n)S}(4S)^{\frac{\alpha^2+n-2}{1-n}} \text{ et} \\ g_{QQ} &= \frac{4\pi b^{\alpha^2}(\alpha^2+1)}{\alpha^2+n-2}(4S)^{\frac{\alpha^2+n-2}{1-n}}. \end{aligned}$$

On peut voir que le déterminant de la métrique de Wienhold est donné par:

$$\begin{aligned} \|g_{ab}\| &= g_{SS}g_{QQ} - g_{SQ}^2 = -\frac{(\alpha^2+1)^2b^{\alpha^2}(4S)^{-\frac{\alpha^2+n-2}{n-1}}}{4(\alpha^2+n-2)(\alpha^2-n)(n-1)^2S^2} [2\Lambda b^{\alpha^2}(-\alpha^4 + \alpha^2 - n^4 - n^2 + \\ &n^3 - n\alpha^2 + 2n^2\alpha^2)(4S)^{-\frac{\alpha^2-n^2}{n-1}} + 32\pi^2b^{\alpha^2}Q^2(n + \alpha^4 - n\alpha^2 - \alpha^2)(4S)^{-\frac{\alpha^2+n-2}{n-1}} + \\ &kb^{-\alpha^2}(-3n\alpha^2 + 2\alpha^2 + n^2\alpha^2 - 2n + 3n^2 - n^3)(4S)^{\frac{\alpha^2+n-2}{n-1}}]. \end{aligned}$$

Maintenant, nous pouvons calculer les  $\Gamma_{abc}$ ,  $R_{abcd}$ ,  $R_{ab}$  et alors la courbure scalaire de Wienhold est obtenue pour être:

$$\begin{aligned} R &= -\frac{16\pi(\alpha^2-n)(\alpha^2+n-2)}{\alpha^2+1} \{ 2\Lambda b^{\alpha^2}(-\alpha^4 + \alpha^2 - n^4 - n^2 + n^3 - n\alpha^2 + 2n^2\alpha^2)(4S)^{-\frac{\alpha^2-n^2}{n-1}} + \\ &32\pi^2b^{\alpha^2}Q^2(n + \alpha^4 - n\alpha^2 - \alpha^2)(4S)^{-\frac{\alpha^2+n-2}{n-1}} + kb^{-\alpha^2}(-3n\alpha^2 + 2\alpha^2 + n^2\alpha^2 - 2n + \\ &3n^2 - n^3)(4S)^{\frac{\alpha^2+n-2}{n-1}} \} - 2[kb^{-\alpha^2}(-2\alpha^2 + 2\alpha^4 + 2n - n^3\alpha^2 + n\alpha^2 - 3n\alpha^4 + 2n^2\alpha^2 + \\ &n^2\alpha^4 - 3n^2 + n^3)(4S)^{\frac{\alpha^2+n-2}{n-1}} + \Lambda b^{\alpha^2}(-2n^4 + 2n^5 - n^6 + 2n^4\alpha^2 - n^2\alpha^4 + 2n^2\alpha^2 - \\ &3n^3\alpha^2 + n\alpha^4 - n\alpha^2 + n^3)(4S)^{-\frac{\alpha^2-n^2}{n-1}}]. \end{aligned}$$

Nous voyons que pour toutes les paramétrisation bien définies de la géométrie thermodynamique, cette courbure de Weinhold est partout régulière. Donc, il s'agit d'un système thermodynamique stable et il n'ya pas d'instabilités dans l'espace thermodynamique à la représentation de l'énergie des trous noirs chargés dilatoniques topologiques.

En outre, il y certains cas d' $\alpha$  pour que la courbure scalaire de Wienhold soit égale à la zéro. Ces valeurs d' $\alpha$  sont données par les equations suivantes:  $(n^2 - 3n + 2)\alpha^4 - (n^3 - 2n^2 - n + 2)\alpha^2 + n^3 - 3n^2 + 2n = 0$  et  $(1 - n)\alpha^4 + (2n^3 - 3n^2 + 2n - n)\alpha^2 + n^2 - 2n^3 + 2n^4 - n^5 = 0$ . Ce sont les valeurs de la constante d'accouplement du dilaton dont lesquelles la courbure scalaire de Wienhold est nulle. Ces solutions sont simplement  $|\alpha| = \{1/2(n^2 - 3n + 2)^{-1}(n^3 - 2n^2 - n + 2 \pm \sqrt{n^6 - 8n^5 + 26n^4 + 60n^3 + 41n^2 - 8n + 4})\}^{1/2}$  et  $|\alpha| = \{1/2(n - 1)^{-1}(2n^3 - 3n^2 + 2n - 1 \mp \sqrt{n^4 - 6n^2 - 4n + 1})\}^{1/2}$ . De plus, le cas de  $n^6 - 8n^5 + 26n^4 + 60n^3 + 41n^2 - 8n + 4 \geq 0$  et  $n^4 - 6n^2 - 4n + 1 \geq 0$  implique des constantes d'accouplement du dilaton physiques et ainsi nous permettre de déterminer le rôle de la constante de cosmologie ou celui de la dimension de l'espace-temps des théories de la gravité dilatonique d'Einstein-Maxwell. C'est-à-dire que  $\forall 2 < n \in \mathbb{Z}$ , la constante d'accouplement du dilaton appartient à un système statistique sans les interactions, dont lesquels  $n$  satisfait ces deux équations.

### 3.3 La géométrie de Wienhold des solutions de $M_2$ - branes: Les trous noirs de Reissner-Nordström dans la nappe de Poincaré d' $AdS_4$ .

Dans cette sous-section, nous analysons la géométrie de Weinhold des trous noirs de la solution de Reissner-Nordström dans  $AdS_4$  découlant naturellement dans la M-théorie. La relation entre l'instabilité thermodynamique et celle de Gregory-Laflamme est un problème important pour comprendre la condensation de certains bosons ayant en charge globale, par exemple le cas des trous noirs chargés électriquement dans  $AdS_5$ . Maintenant, nous allons examiner le plongement de la solution de Reissner-Nordström d' $AdS_4$  dans la M- théorie. Cette incorporation peut être faite comme suite: Envisageons un grand nombre de  $M_2$ -branes coïncidants dans la supergravité d'onze dimensions, avec la géométrie de proche de l'horizon d' $AdS_4 \times S^7$ . Puis, il y a huit dimensions transversales aux  $M_2$ -branes, et quatre moments angulaires indépendants ce que les branes peuvent acquérir, s'ils sont proches de l'extremal. Pour l'ensemble des quatre moments d'angulaire égale, la solution est un produit enroulé de la solution de Reissner-Nordström dans  $AdS_4$  et une déformation de  $S^7$ , voir [69] pour le détails.

Précisément, la réduction de la filature sur  $S^7$  pour la solution quasi-extrémale des  $M_2$ -branes noirs dans l'espace-temps asymptotiquement plats d'onze dimension est la limite de la solution de Reissner-Nordström dans  $AdS_4$ . Cette solution est la réduction bien connue de la supergravité d'onze dimensions qui est asymptotiquement l' $AdS_4 \times S^7$ . C'est parce que la solution de Reissner-Nordström dans  $AdS_4$  est une solution dans la supergravité jaugée de  $\mathcal{N} = 8$ , dont le vide d' $AdS_4$  supersymétrique maximum est la réduction de Kaluza-Klein du vide de l' $AdS_4 \times S^7$  de la M-théorie. De plus, la supergravité jaugée de  $\mathcal{N} = 8$  est une truncation consistante de la supergravité de  $D = 11$  [70]. Donc, toutes les solutions classiques de la théorie de  $D = 4$  ont des ascenseurs à une solution exacte classique de la théorie de  $D = 11$ . Ainsi, toutes les instabilités actuelles en  $D = 4$  sont garantiement à persister dans la dimension  $D = 11$ . Notez que seulement pour les gammes spécifiques de paramètres, nous avons les solutions souhaitées. Sinon, les solutions ont tendance à avoir certaines singularités nues. Par exemple, nous considérons certaines charges physiques conservées correspondant aux quatre indépendantes moments d'angulaires des  $M_2$ -branes en onze dimensions.

En ce qui concerne avec la correspondance d'AdS/CFT, Maldacena a conjecturé [2, 35] qu'il y a une théorie de la supergravité en  $D = 11$  sur l' $AdS_4 \times S^7$  qui est physiquement équivalent à la limite de grand  $N$  de certaines théories de champs conformes vivant à la frontière d' $AdS_4$  et représente la limite de l'énergie basse de la dynamique de  $\langle\langle$  worldvolume  $\rangle\rangle$  des  $M_2$ -branes coïncidentes de nombre  $N$ . Donc, les charges électriques de la théorie deviennent les charges globales de la R-symétrie dans la théorie des champs conformes à la frontière. Pour la masse suffisamment grande, les solutions correspondentes aux états thermiques de la théorie des champs conformes avec les potentiels chimiques lorsque les charges globales sont non nulles. En fait, pour le cas des trous noirs avec les charges électriques dans  $AdS_5$ , la description duale de l'instabilité thermodynamique est une instabilité vers la condensation des bosons transportant les charges globaux d' $U(1)$ . Pour les raisons de la simplicité, nous tournons maintenant pour le cas de  $Q_1 = Q_3$  et  $Q_2 = Q_4$  et de ne considérer que la limite de grands trous noirs:  $M/L \gg 1$ . Comme  $M/L \rightarrow \infty$ , on obtient une solution des branes noirs dans la nappe de Poincaré d' $AdS_4$ . Dans cette limite, la  $S^2$  est remplacé par  $R^2$  dans la métrique de l'espace-temps, et ainsi la masse de ces trous noirs de Reissner-Nordström est donnée par une expression simple [32, 33]:  $M(S, Q_1, Q_2) := \frac{1}{2\pi L^2} \sqrt{\frac{S^3}{\pi} + \pi L^2(Q_1^2 + Q_2^2)S} + \frac{\pi^3 L^4}{S} Q_1^2 Q_2^2$ .



Donc, les composantes de la métrique de Wienhold sont données par

$$\begin{aligned}
g_{SS} &= -\frac{1}{8} \frac{(\frac{3S^2}{\pi} + \pi L^2 Q_1^2 + \pi L^2 Q_2^2 - \frac{\pi^3 L^4 Q_1^2 Q_2^2}{S^2})^2}{\pi L^2 (\frac{S^3}{\pi} + \pi L^2 Q_1^2 S + \pi L^2 Q_2^2 S + \frac{\pi^3 L^4 Q_1^2 Q_2^2}{S})^{3/2}} + \frac{\frac{3S}{2\pi} + \frac{\pi^3 L^4 Q_1^2 Q_2^2}{2S^3}}{\pi L^2 \sqrt{\frac{S^3}{\pi} + \pi L^2 Q_1^2 S + \pi L^2 Q_2^2 S + \frac{\pi^3 L^4 Q_1^2 Q_2^2}{S}}}, \\
g_{SQ_1} &= -\frac{1}{4} \frac{(\pi L^2 Q_1 S + \frac{\pi^3 L^4 Q_1 Q_2^2}{S})(\frac{3S^2}{\pi} + \pi L^2 Q_1^2 + \pi L^2 Q_2^2 - \frac{\pi^3 L^4 Q_1^2 Q_2^2}{S^2})}{\pi L^2 (\frac{S^3}{\pi} + \pi L^2 Q_1^2 S + \pi L^2 Q_2^2 S + \frac{\pi^3 L^4 Q_1^2 Q_2^2}{S})^{3/2}} + \frac{\frac{\pi L^2 Q_1}{2} - \frac{\pi^3 L^4 Q_1 Q_2^2}{2S^2}}{\pi L^2 \sqrt{\frac{S^3}{\pi} + \pi L^2 Q_1^2 S + \pi L^2 Q_2^2 S + \frac{\pi^3 L^4 Q_1^2 Q_2^2}{S}}}, \\
g_{SQ_2} &= -\frac{1}{4} \frac{(\pi L^2 Q_2 S + \frac{\pi^3 L^4 Q_2 Q_1^2}{S})(\frac{3S^2}{\pi} + \pi L^2 Q_1^2 + \pi L^2 Q_2^2 - \frac{\pi^3 L^4 Q_1^2 Q_2^2}{S^2})}{\pi L^2 (\frac{S^3}{\pi} + \pi L^2 Q_1^2 S + \pi L^2 Q_2^2 S + \frac{\pi^3 L^4 Q_1^2 Q_2^2}{S})^{3/2}} + \frac{\frac{\pi L^2 Q_2}{2} - \frac{\pi^3 L^4 Q_1 Q_2^2}{2S^2}}{\pi L^2 \sqrt{\frac{S^3}{\pi} + \pi L^2 Q_1^2 S + \pi L^2 Q_2^2 S + \frac{\pi^3 L^4 Q_1^2 Q_2^2}{S}}}, \\
g_{Q_1 Q_1} &= -\frac{1}{2} \frac{(\pi L^2 Q_1 S + \frac{\pi^3 L^4 Q_1 Q_2^2}{S})^2}{\pi L^2 (\frac{S^3}{\pi} + \pi L^2 Q_1^2 S + \pi L^2 Q_2^2 S + \frac{\pi^3 L^4 Q_1^2 Q_2^2}{S})^{3/2}} + \frac{\frac{\pi L^2 S}{2} + \frac{\pi^3 L^4 Q_2^2}{2S}}{\pi L^2 \sqrt{\frac{S^3}{\pi} + \pi L^2 Q_1^2 S + \pi L^2 Q_2^2 S + \frac{\pi^3 L^4 Q_1^2 Q_2^2}{S}}}, \\
g_{Q_1 Q_2} &= -\frac{1}{2} \frac{(\pi L^2 Q_1 S + \frac{\pi^3 L^4 Q_1 Q_2^2}{S})(\pi L^2 Q_2 S + \frac{\pi^3 L^4 Q_2 Q_1^2}{S})}{\pi L^2 (\frac{S^3}{\pi} + \pi L^2 Q_1^2 S + \pi L^2 Q_2^2 S + \frac{\pi^3 L^4 Q_1^2 Q_2^2}{S})^{3/2}} + \frac{\pi^2 L^2 Q_1 Q_2}{S \sqrt{\frac{S^3}{\pi} + \pi L^2 Q_1^2 S + \pi L^2 Q_2^2 S + \frac{\pi^3 L^4 Q_1^2 Q_2^2}{S}}}, \\
\text{et} \\
g_{Q_2 Q_2} &= -\frac{1}{2} \frac{(\pi L^2 Q_2 S + \frac{\pi^3 L^4 Q_2 Q_1^2}{S})^2}{\pi L^2 (\frac{S^3}{\pi} + \pi L^2 Q_1^2 S + \pi L^2 Q_2^2 S + \frac{\pi^3 L^4 Q_1^2 Q_2^2}{S})^{3/2}} + \frac{\frac{\pi L^2 S}{2} + \frac{\pi^3 L^4 Q_1^2}{2S}}{\pi L^2 \sqrt{\frac{S^3}{\pi} + \pi L^2 Q_1^2 S + \pi L^2 Q_2^2 S + \frac{\pi^3 L^4 Q_1^2 Q_2^2}{S}}}.
\end{aligned}$$

Ainsi, le déterminant du tenseur métrique de Wienhold est simplement,

$$\begin{aligned}
g &= -\frac{1}{32\pi^3 L^2 S^6} \left\{ \frac{S^4 + \pi^2 L^2 Q_1^2 S^2 + \pi^2 L^2 Q_2^2 S^2 + \pi^4 L^4 Q_1^2 Q_2^2}{S} \right\}^{-5/2} (\pi^6 L^6 S^6 Q_2^6 + \pi^6 L^6 S^6 Q_2^4 Q_1^2 - \\
&7\pi^4 L^4 S^8 Q_1^2 Q_2^2 + 5\pi^8 L^8 S^4 Q_1^4 Q_2^2 - 3S^{12} + 3\pi^8 L^8 S^4 Q_2^6 Q_1^2 - 5\pi^2 L^2 S^{10} Q_1^2 - 5\pi^2 L^2 S^{10} Q_2^2 - \\
&\pi^4 L^4 S^8 Q_2^4 - \pi^4 L^4 S^8 Q_1^4 + 3\pi^{10} L^{10} S^2 Q_2^4 Q_1^6 + \pi^6 L^6 S^6 Q_1^4 Q_2^2 + 3\pi^8 L^8 S^4 Q_1^6 Q_2^2 + 3\pi^{10} L^{10} S^2 Q_2^6 Q_1^4 + \\
&\pi^6 L^6 S^6 Q_1^6 + \pi^{12} L^{12} Q_2^6 Q_1^6).
\end{aligned}$$

Alors, la courbure scalaire de Wienhold peut être obtenue à:

$$\begin{aligned}
R &= -(3\pi^2 L^2 S) \sqrt{\frac{S^4 + \pi^2 L^2 Q_1^2 S^2 + \pi^2 L^2 Q_2^2 S^2 + \pi^4 L^4 Q_1^2 Q_2^2}{S}} \left\{ (\pi^6 L^6 Q_1^4 Q_2^2 + \pi^4 L^4 Q_1^4 S^2 + \right. \\
&2\pi^4 L^4 Q_1^2 S^2 Q_2^2 - 2\pi^2 L^2 Q_1^2 S^4 + \pi^2 L^2 S^4 Q_2^2 - 3S^6) (\pi^4 L^4 Q_1^2 Q_2^2 + \pi^2 L^2 Q_1^2 S^2 + \pi^2 L^2 Q_2^2 S^2 - \\
&3S^4) (S^2 + \pi^2 L^2 Q_2^2) \left. \right\}^{-1} (\pi^8 L^8 Q_1^4 Q_2^4 + 2\pi^6 L^6 Q_1^4 S^2 Q_2^2 + 2\pi^6 L^6 Q_2^4 S^2 Q_1^2 + \pi^4 L^4 Q_1^4 S^4 - \\
&12\pi^4 L^4 S^4 Q_1^2 Q_2^2 + \pi^4 L^4 Q_2^4 S^4 - 14\pi^2 L^2 S^6 Q_1^2 - 14\pi^2 L^2 S^6 Q_2^2 + S^8).
\end{aligned}$$

Dans la grande masse limite, cette solution de branes noirs dans la nappe de Poincaré d' $AdS_4$  a l'instabilité thermodynamique locale dont les comportements peuvent être vus facilement dans la courbure scalaire de Weinhold, comme ci-dessus. Nous voyons que l'instabilité thermodynamique locale peut être étudiée par la géométrie de Wienhold dont la métrique est la hessienne de la masse  $M(S, Q_1, Q_2)$  et donc cette géométrie décrit la convexité de la fonction de la masse. Nous avons observé, si on augmente l'une de charge électrique alors l'autres diminue qui ne peut se produire que lorsqu'elle détient localement sur une compte de la conservation de la charge globale [71].

Ici, nous voyons clairement que la courbure scalaire de Wienhold diverge pour toute l'entropie données par les equations suivantes:  $\pi^2 L^2 Q_2^2 + S^2 = 0$ ,  $\pi^4 L^4 Q_1^2 Q_2^2 + \pi^2 L^2 (Q_1^2 + Q_2^2) S^2 - 3S^4 = 0$  et  $\pi^6 L^6 Q_1^4 Q_2^2 + \pi^4 L^4 Q_1^2 (Q_1^2 + 2Q_2^2) S^2 + \pi^2 L^2 (Q_2^2 - 2Q_1^2) S^4 - 3S^6 = 0$ . Il est important de noter qu'il existe certaines gammes thermodynamiquement limitées d'instabilités pour les trous noirs de Reissner-Nordström dans l' $AdS_4$ , par exemple les racines réelles de l'entropie sont données par l'équation quadratique ci-dessus:  $S = \frac{\pi L}{6} \{Q_1^2 + Q_2^2 + \sqrt{Q_1^4 + Q_2^4 + 12Q_1^2 Q_2^2}\}^{1/2}$  ou bien celles d'autres données par les racines réelles de l'équation cubique ci-dessus, dont lesquelles, on a les frontières des solutions de l'entropie avec lesquelles les singularités thermodynamiques existent. En outre, la courbure scalaire de Wienhold est nulle

dont l'entropie est donnée par,  $\pi^8 L^8 Q_1^4 Q_2^4 + 2\pi^6 L^6 Q_1^4 S^2 Q_2^2 + 2\pi^6 L^6 Q_2^4 S^2 Q_1^2 + \pi^4 L^4 Q_1^4 S^4 - 12\pi^4 L^4 S^4 Q_1^2 Q_2^2 + \pi^4 L^4 Q_2^4 S^4 - 14\pi^2 L^2 S^6 Q_1^2 - 14\pi^2 L^2 S^6 Q_2^2 + S^8 = 0$ . Dans les sections suivantes nous allons considérer les corrections dans la géométrie thermodynamique des trous noirs.

## 4 Les corrections de $l_P$ dans la géométrie thermodynamique.

Dans cette section, motivés par la théorie des cordes, nous étudions les effets du principe d'incertitude généralisée sur la géométrie thermodynamique des trous noirs. En fait, la nature non-commutative de l'espace-temps à l'échelle de Plank implique qu'il existe la distance observable minimale de l'ordre de la longueur de Plank où toutes les mesures de la limite d'extrême de la gravité quantique sont gouvernées. Cette distance minimale observable dite que le principe d'incertitude généralisé peut être écrite comme [72, 73, 74, 75]:  $\Delta x \geq \frac{\hbar}{\Delta p} + \frac{\tilde{\alpha} l_P^2}{\hbar} \Delta p$ . Bien que dans toutes les théories générales, les contributions de l'ordre supérieur peuvent être non nulles mais la longueur minimale dans la théorie est simplement régie par le paramètre  $\tilde{\alpha}$  [21], comme au-dessus. Le principe d'incertitude généralisée montre qu'il y a une dispersion minimum  $\Delta x$  pour toute valeur de  $\Delta p$  du moins aussi longtemps ce que les deux premiers termes de cette expansion soient non nulles.

Un exemple de la motivation provient grâce à l'étude des conditions d'analyticité d'une fonction complexe conduisant au principe d'incertitude complètement généralisée, fait apparaître les concepts physiques bien connues [21]. Nous avons étudié ces effets sur la physique du principe d'incertitude et avons expliqué que le principe d'incertitude de la théorie des cordes se pose naturellement de l'analyse des fonctions holomorphes. Ces considérations illustrent le récit de la forme et de la taille correspondant au principe d'incertitude d'Heisenburg bien connue pour toutes les fonctions arbitraire de  $L^2$ . De plus, nous pouvons arriver au principe d'incertitude de la théorie des cordes avec toutes les corrections d'ordre supérieur, la physique de la gravité quantique, la physique des trous noirs, l'existence des échelles de la longueur minimale et maximale de la nature, la géométrie des distances courtes versus la théorie des cordes, la transformation de Fourier par rapport à la théorie des distributions. Voir [21] pour détail de l'état d'actuel des corrections du  $l_P$ . Dans les deux sous-sections prochaines, nous souhaitons analyser les effets de principe d'incertitude généralisé sur la géométrie thermodynamique des trous noirs de Reissner-Nordström et ceux de trous noirs chargés magnétiquement.

Maintenant, nous ferons donc une brève rappelle de la géométrie de Ruppenier et ensuite l'appliquons à l'entropie des trous noirs corrigé par les corrections du principe d'incertitude généralisée. De plus, nous allons voir, quelles sont les effets des corrections de  $l_P$  dans la géométrie thermodynamique de Ruppenier? Pour ça,

définissons la métrique thermodynamique pour être:  $g_{ij}(x) = - \begin{pmatrix} S_{MM} & S_{QM} \\ S_{QM} & S_{QQ} \end{pmatrix}$

avec  $i, j = M, Q$  [46, 47]. Alors, l'élément de la ligne est  $ds^2 = -S_{MM}dM^2 - 2S_{MQ}dMdQ - S_{QQ}dQ^2$ , dont le déterminant est juste  $\det(g) = S_{MM}S_{QQ} - S_{MQ}^2$ . En utilisant cette forme générale de la métrique de Ruppeiner, il n'est pas difficile de voir que les symboles de Christoffel, qui sont définis comme  $\Gamma_{ijk} = g_{ij,k} + g_{ik,j}g_{jk,i}$ , sont donnés par:  $\Gamma_{MMM} = -\frac{1}{2}S_{MMM}, \Gamma_{QQQ} = -\frac{1}{2}S_{QQQ}, \Gamma_{MMQ} = -\frac{1}{2}S_{QMM}, \Gamma_{MQM} = -\frac{1}{2}S_{QMM}, \Gamma_{MQQ} = -\frac{1}{2}S_{MQQ}, \Gamma_{QQM} = -\frac{1}{2}S_{QQM}$ ; avec les symétries reliant les autres composantes. Ensuite, nous pouvons voir facilement que le seul composant différent de zéro du tenseur de la courbure de Ruppeiner-Riemann-Christoffel est obtenu pour être:  $R_{MQMQ} = \frac{1}{4(S_{MM}S_{QQ} - S_{QM}^2)}(-S_{QM}S_{MMM}S_{QQQ} + S_{QQM}S_{MMM}S_{QQ} - S_{MM}S_{QQM}^2 + S_{MM}S_{QMM}S_{QQQ} + S_{QMM}S_{QM}S_{QQM} - S_{QM}^2S_{MM}S_{QQ})$ .

Nous pouvons la contracter avec la  $g^{ij}$  et obtenir  $R_{ij}$  et puis la courbure scalaire de Ruppenier est donnée par:  $R = \frac{1}{2(S_{MM}S_{QQ} - S_{QM}^2)}(-S_{QM}S_{MMM}S_{QQQ} + S_{QQM}S_{MMM}S_{QQ} - S_{MM}S_{QQM}^2 + S_{MM}S_{QMM}S_{QQQ} + S_{QMM}S_{QM}S_{QQM} - S_{QMM}^2S_{QQ})$ . Enfin, dans ce cas, il n'est pas difficile de voir que la courbure scalaire de Ruppenier est reliée avec la courbure de Riemann-Christoffel par:  $R = \frac{2}{\det(g)}R_{MQMQ}$ .

#### 4.1 Les trous noirs de Reissner-Nordström.

La métrique de l'espace-temps de trou noir de Reissner-Nordström avec la masse  $M$  et la charge  $Q$  est donné par:  $ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + r^2d\theta^2 + r^2\sin^2\theta d\phi^2$  où  $f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{Q^2}{r^2}$ . L'horizon intérieur et extérieur sont simplement,  $r_{\mp} = M \mp \sqrt{M^2 - Q^2}$ . Nous pouvons voir que la température est donnée par  $T = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{r_+ - r_-}{4\pi r_+^2}$  où  $\kappa$  est la gravité de la surface du trou noir. On a vu récemment [76] qu'il n'y a aucune nécessité de la limite de Brick-Wall dans le calcul de l'entropie parce qu'on peut avoir un champ scalaire satisfaisant l'équation de Klein-Gordon, avec laquelle dans l'approximation de WKB, t'Hooft a montré que le nombre d'états quantiques est fini, qui reste également le même à l'horizon du trou noir [77].

En considérant une couche mince entre  $r_+$  et  $r_+ + \epsilon$  pour un trou noir non-extrémal de Reissner-Nordström. Puisque la densité des états est dominante près de l'horizon du trou noir de Reissner-Nordström, pour le comptage des modes. C'est à dire que, soit  $x = \frac{\omega}{2k_B T} \rightarrow 0$  et  $x_0 = \frac{\mu\sqrt{f}}{2k_B T}$  puis près de l'horizon la longueur minimale du GUP est  $2\sqrt{\lambda} = \sqrt{\frac{2\epsilon}{\kappa}}$ , ce qui entraîne à l'entropie suivante du trou noir de Reissner-Nordström:  $S(M, Q) = \frac{4\pi r_+^2}{3\lambda}(\frac{\pi}{24} - \frac{25}{32\pi} + \frac{\zeta(3)}{\pi})$ , ce qui est fini dans la limite près de l'horizon. Cette entropie peut être écrite  $S(M, Q) = (\frac{1}{4}A_H)\frac{\delta}{\lambda}$ , où  $\delta := \frac{1}{3}[\frac{4}{\pi}\zeta(3) - \frac{25}{8\pi} - \frac{\pi}{6}]$ [76]. En mettant la valeur de la  $r_+$ , nous pouvons écrire l'entropie comme suivante:  $S(M, Q) = \frac{\pi\delta}{\lambda}[2M^2 - Q^2 + 2M\sqrt{M^2 - Q^2}]$ . Pour cette entropie de trou noir de Reissner-Nordström avec des corrections de  $l_P$ , les composantes de la métrique de Ruppenier  $\{g_{ij}\}_{i,j \in \{M, Q\}}$  sont données par

$$\begin{aligned} g_{MM} &= \frac{\pi\delta}{\lambda}(-4 - \frac{6M}{\sqrt{M^2 - Q^2}} + \frac{2M^3}{(M^2 - Q^2)^{3/2}}), \\ g_{MQ} &= \frac{\pi\delta}{\lambda}(\frac{2Q}{\sqrt{M^2 - Q^2}} - \frac{2M^2Q}{(M^2 - Q^2)^{3/2}}) \text{ et} \\ g_{QQ} &= \frac{\pi\delta}{\lambda}(2 + \frac{2M}{\sqrt{M^2 - Q^2}} + \frac{2MQ^2}{(M^2 - Q^2)^{3/2}}). \end{aligned}$$

Donc, le déterminant de cette métrique de Ruppenier peut être obtenus à:  $\det(g) = -\frac{4\pi^2\delta^2}{\lambda^2(Q^2 - M^2)^2}(4M^4 - 5M^2Q^2 + Q^4 + 2MQ^2\sqrt{M^2 - Q^2} + 5M(M^2 - Q^2)^{3/2} - M^3\sqrt{M^2 - Q^2})$ . Ici, nous pouvons voir facilement qu'on a la courbure de Ruppenier-Riemann-Christoffel:  $R_{MQMQ} = 0$  qui entraîne que la courbure scalaire de Ruppenier est  $R = 0$ . En conclusion, bien qu'on ajoute les corrections de  $l_P$  dans l'entropie du trou noir de Reissner-Nordström, ce système thermodynamique est bien défini et reste également un système statistique sans interactions.

#### 4.2 Les trous noirs chargés magnétiquement.

Maintenant, considérons un système non-trivial des trous noirs, en particulier les trous noirs magnétisés. Dans ce cas-ci, soit  $ds^2 = -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{f(r)} + R(r)^2d\Omega_2^2$  la métrique de l'espace-temps. Puis dans l'approximation entre  $r_+$  and  $r_+ + \epsilon$  où  $\epsilon \rightarrow 0$ , nous pouvons écrire:  $f(r) = \kappa(r - r_+) + \frac{f''(R_+)}{2}(r - r_+)^2 + \dots$  et  $R(r)^2 = R(r_+) + \frac{d}{dr}R(r_+)^2(r - r_+) + \frac{1}{2}\frac{d^2}{dr^2}R(r_+)^2(r - r_+)^2 + \dots$ . Soit  $\lambda$  le paramètre de

GUP alors qu'il peut être écrit comme:  $2\sqrt{\lambda} \simeq \frac{\sqrt{\epsilon}}{\sqrt{\kappa}}(2 - \frac{f'\epsilon}{6\kappa})$ . Le trou noir magnétisé avec l'accouplement arbitraire a:  $f(r) = 1 - \frac{r_+}{r}, R(r)^2 = r(r - r_-), 2M = r_+$  et  $Q = \frac{r_+ - r_-}{2}$ . Pour le cas non-extrémal, nous pouvons voir trivialement que la température d'Hawking est donné par:  $T_{BH} = \frac{1}{2\pi r_+}$ . Avec la superficie de l'horizon d'événement  $A_H = 4\pi(r_+ - r_-)$  et ainsi, le paramètre  $\lambda$  de GUP entraîne que l'entropie à l'ordre  $\lambda^0$  est  $S_{BH} = \frac{a_H}{4G_N} + \frac{4}{9}\zeta(3) + \frac{2r_-}{r_+}\zeta(7) + \heartsuit(\lambda)$  [78]. Comme dans ce cas, nous avons:  $r_+ = 2M$  et  $r_- = \frac{Q^2}{M}$ . Donc, en termes de paramètres thermodynamiques  $M$  et  $Q$ , l'entropie du trou noir magnétisé peut être écrite à  $S_{BH}(M, Q) = \frac{4}{9}\zeta(3) + 8\pi(2M^2 - Q^2) + \frac{Q^2}{M^2}\zeta(7) + \heartsuit(\lambda)$ . Pour ce cas de trou noir magnétisé avec le paramètre  $\lambda$  du principe d'incertitude généralisée, les composantes de la métrique  $g_{ij}$  de Ruppenier sont simplement:

$$\begin{aligned} g_{MM} &= -32\pi - \frac{6Q^2\zeta(7)}{M^4}, \\ g_{MQ} &= \frac{4Q\zeta(7)}{M^3} \text{ et} \\ g_{QQ} &= 16\pi - \frac{2\zeta(7)}{M^2}. \end{aligned}$$

Ainsi, nous voyons immédiatement que le déterminant de cette métrique est,  $\det(g) = -\frac{4}{M^6}(128\pi^2 M^6 - 16\pi\zeta(7)M^4 + 24\pi\zeta(7)Q^2 M^2 + \zeta(7)^2 Q^2)$ . Il n'est pas difficile d'obtenir que la courbure scalaire de Ruppenier est:  $R = 8\pi\zeta(7)^2 M^4(128\pi^2 M^6 - 16\pi\zeta(7)M^4 + 24\pi\zeta(7)Q^2 M^2 + \zeta(7)^2 Q^2)^{-2}(3Q^2 - 2M^2)$ . Les divergences de cette equation sont données par une equation cubique dans une variable  $N := M^2$  qui sont seulement les points zéros du déterminant, lesquels sont données par l'équation:  $(128\pi^2)N^3 + (-16\pi\zeta(7))N^2 + (24\pi\zeta(7)Q^2)N + (\zeta(7)^2 Q^2) = 0$ , dont nous n'avons pas d'intérêt parce que  $\det(g) = 0$ . Maintenant, nous pouvons voir facilement qu'aux racines de cette equation cubique, la géométrie de Ruppenier n'est pas bien définie. Sinon aux tous les autre points de la variété de l'espace d'état, cette curbure de Ruppenier est partout régulière. En outre, il y a quelque cas particulière de la masse:  $M = \sqrt{\frac{3}{2}}|Q|$  dans laquelle ce système devenu sans les interactions statistiques, dont la curbure scalaire de Ruppenier est nulle.

## 5 Les corrections d' $\alpha'$ dans la géométrie thermodynamique.

Dans cette section, nous considérons la géométrie thermodynamique de l'entropie obtenu par la fonction de l'entropie de Sen [1]. En fait, nous avons également enquêté sur l'utilisation de cette géométrie de Ruppenier dans certains bien connu systèmes de trous noirs, et indiquons que la courbure scalaire de cette géométrie fournite quelques résultats physiquement intéressants. Ensuite, nous avons obtenu une généralisation de la courbure de cette géométrie à l'ordre supérieur arbitraires des corrections d' $\alpha'$  en termes des quantités d'espace d'états sous-jacent. Comme, tous les trous noirs extremals ont une géométrie proche d'horizon d' $AdS_2 \times S^2$ , ce qui s'appelle la vide habituelle de Robinson-Bertotti. De plus, tous les champs de la théorie doivent respecter la symétrie de  $SO(2, 1) \times SO(3)$ . Dans ce cadre, l'entropie d'un trou noir extrémal est définie par Sen, comme:  $S_{BH}^{(ext)} = \lim_{h \rightarrow 0} S_{BH}$ ; où  $h = r_+ - r_-$  est la différence des distances de l'horizon extérieur et celui d'intérieur du trou noir. Cette limitation dans la procédure de Sen est nécessaire car les trous noirs extrémaux n'ont pas de l'horizon bifurquant de Killing. En général, considérons la lagrangienne covariante de la gravité avec des dérivées supérieures que deux, et ainsi cette lagrangienne est:  $\mathcal{L} := \mathcal{L}[g_{\mu\nu}, Dg_{\mu\nu}, \dots; \Phi_s, D\Phi_s, \dots; F_{\mu\nu}^i, DF_{\mu\nu}^i, \dots; \gamma]$  [79, 80, 81], qui peut être aussi écrite dans une forme manifestement covariante. Et bien aussi, il est bien connue par le théorème de remplacement de Thomos que la  $\mathcal{L}$

est indépendante de la base  $\gamma$ . Dans la considération de Sen, la théorie de l'intérêt est tel que les dérivées covariantes de tous les champs tenseurs disparaissent, de sorte que la formule de Walds de l'entropie est donnée par:  $S_{BH} := 8\pi \frac{\partial \mathcal{L}}{R_{\alpha\beta\gamma\delta}} g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta} A_H$ ; où  $A_H$  est la zone d'horizon de l'événement.

De plus, l'entropie de n'importe quel trou noir extrémal peut être obtenu par la méthode de la fonction de l'entropie Sen, de la façon suivante [1, 11]. Définissons une fonction:  $f(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p}) := \int \int_S^2 \sqrt{-\det g} \mathcal{L}, d\theta d\phi$ , où  $(\theta, \phi)$  sont les éléments de  $S^2$  qui est l'horizon du trou noir dans  $D = 4$ . Ensuite, la fonction de l'entropie cosistante avec les équations du mouvement, est donnée par  $F_{BH} := 2\pi(e_i \frac{\partial f}{\partial e_i} - f)$  où les  $e_i$  sont les  $(rt)$ -composantes d'une force tenseur des champs de jauges, comme  $F_{\mu\nu}^i := \partial_\mu A_\nu^i - \partial_\nu A_\mu^i$ . Ici, les charges électriques sont mesurées par la transformation de Legendre,  $q_i := \frac{\partial f}{\partial e_i}$ . Ainsi, la méthode de la fonction de l'entropie peut être considérée comme une manière la plus suggestive du mécanisme d'attracteur. Ensuite, l'entropie de ces trous noirs est définie par l'extremum de  $F(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})$  à l'égard de  $\vec{u}, \vec{v}$ . C'est-à-dire que nous avons  $S_{BH} := F(\vec{u}, \vec{v}, \vec{e}, \vec{p})|_{(\vec{u}_0, \vec{v}_0)}$ .

Donc, la géométrie de Ruppenier est définie comme les fluctuations gaussiennes de la fonction de la distribution de la probabilités ou la négative d'Hessian de l'entropie à l'égard des charges invariantes  $N^a$ , où  $a = 1, 2, \dots, N$ . Ici, nous considérons la géométrie thermodynamique de l'entropie par la matrice d'Hessienne de l'entropie d'un trou noir extrémal obtenu par la fonction de l'entropie de Sen, tel que la métrique de Ruppenier est définie, ci-dessous:  $g_{ij}^R := -\partial_i \partial_j S(M, N^a)$ ; où  $i, j, a = 1, 2, \dots, N$ . Nous voyons qu'il s'agit une forme bilinéaire symétrique et positive définie. Puis avec ça, l'élément de la ligne est simplement:  $dS^2 := g_{ij}^R(M, N^a) dx^i dx^j$  [44, 45, 46]. En outre, notez que ce cadre géométrique est attrayant, comme nous allons considérer seulement l'entropie, et nous allons travailler à l'habitude des points fixes d'attracteur de l'espace de modules. Cela tient au fait que l'entropie d'un trou noir extrémal est l'extremum de la fonction de l'entropie den Sen.

## 5.1 La géométrie de Ruppenier des trous noirs dyoniques extrémaux supersymétriques en quatre dimensions.

Dans cette sous-section, nous examinons les corrections d' $\alpha'$  dans la géométrie thermodynamique dues aux termes de Gauss-Bonnet de la théorie effective d'une boucle de l'action de la forme:  $\Delta S = \int d^4x \sqrt{-\det g} \phi(a, s) (R_{\mu\nu\rho\sigma} R^{\mu\nu\rho\sigma} - 4R_{\mu\nu} R^{\mu\nu} + R^2)$ , où  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  est le tenseur de Riemann-Christoffel construite par la métrique canonique:  $g_{\mu\nu} = sG_{\mu\nu}$  et la fonction  $\phi(a, s)$  apparaissant ci-dessus est donnée dans [82]. Voir pour calculer cette fonction  $\phi(a, s)$  dans la revue d'Ashoke Sen [11] et d'où le résultat est:  $\phi(a, s) = -\frac{1}{64\pi^2} ((k+2) \ln s + \ln g(a+is) + \ln g(a-is)) + \text{constant}$ . Dans cette formule, le  $k$  est égale à la moitié du nombre de certains formes invariants harmoniques de type (1,1) sur  $\mathcal{M}$  qui dépend des détails de la compactification et la fonction  $g(\tau)$  est donnée par:  $g(\tau) = e^{2\pi\hat{\alpha}\tau} \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{r=0}^{N-1} (1 - e^{2\pi i r/N} e^{2\pi i n \tau})^{s_r}$ . Ici, il est bien connu que les  $s_r$  compte le nombre de forme harmonique de type  $p$  sur  $\mathcal{M}$  avec les valeurs propres  $e^{2\pi i r/N}$  pondérée par  $(-1)^p$  et  $\hat{\alpha}$  est la caractéristique d'Euler de  $\mathcal{M}$  divisé par 24 qui est respectivement égal à (1,0) pour  $\mathcal{M}$  d'être  $(K_3, T^4)$  ce qui est la même inquiétude dans la description duale de la théorie de (hétérotique, type-II).

D'autre part, les corrections de l'entropie du trou noir due aux termes de Gauss-Bonnet peuvent être obtenus en considérant des corrections au niveau d'arbres de la théorie des supercordes à l'action effective. Puis, par la définition de la fonction de l'entropie d'Ashoke Sen, on peut avoir les corrections en raison des termes de Gauss-Bonnet à l'entropie de ces trous noirs. Par souci de simplicité, considérons maintenant une classe spéciale des trous noirs pour lesquels, les vecteurs de charges

électriques et magnétiques sont données par:

$$Q = \begin{pmatrix} n \\ 0 \\ w \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 0 \\ W \\ 0 \\ N \end{pmatrix}.$$

Puis dans le cas de  $N, W \gg n, w$  avec  $N, W > 0$  et  $n, w < 0$  dont au près de l'horizon du trou noir, la fonction  $\phi(a, s)$  devient de sorte qu'on a:  $\phi \simeq \frac{1}{16\pi} \hat{\alpha} \sqrt{\frac{nw}{NW+4\hat{\alpha}}}$ .

Donc, à la fine du calcul, on obtient l'entropie des trous noirs avec les inclusions des termes de Gauss-Bonnet, qui est donnée par [11],  $S_{BH} = 2\pi\sqrt{nw(NW+4\hat{\alpha})}$ . Maintenant pour voir les idées comme les interaction thermodynamiques, la transition de phase ... etc de la thermodynamique des trous noirs, nous avons besoin d'examiner les fluctuations thermodynamiques qui sont bien codées dans la géométrie thermodynamique pour que l'élément de la ligne soit définie par:  $ds^2 = g_{ab}dN^a dN^b$ , où  $N^a = (n, w, N, W)$  sont les grandes charges. Puis, il n'est pas difficile d'écrire que les composantes de la métrique de Ruppenier associées avec cet entropie, peuvent être données simplement par:

$$\begin{aligned} g_{nn} &= \frac{\pi}{2n} \sqrt{\frac{w}{n}(NW+4\hat{\alpha})} \\ g_{nw} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{NW+4\hat{\alpha}}{nw}} \\ g_{nN} &= -\frac{\pi W}{2} \sqrt{\frac{w}{n(NW+4\hat{\alpha})}} \\ g_{nW} &= -\frac{\pi N}{2} \sqrt{\frac{w}{n(NW+4\hat{\alpha})}} \\ g_{ww} &= \frac{\pi}{2w} \sqrt{\frac{w}{n}(NW+4\hat{\alpha})} \\ g_{wN} &= -\frac{\pi W}{2} \sqrt{\frac{n}{w(NW+4\hat{\alpha})}} \\ g_{wW} &= -\frac{\pi N}{2} \sqrt{\frac{n}{w(NW+4\hat{\alpha})}} \\ g_{NN} &= \frac{\pi W^2 \sqrt{nw}}{2(NW+4\hat{\alpha})^{3/2}} \\ g_{NW} &= -\frac{\pi \sqrt{nw}(NW+8\hat{\alpha})}{2(NW+4\hat{\alpha})^{3/2}} \\ g_{WW} &= \frac{\pi N^2 \sqrt{nw}}{2(NW+4\hat{\alpha})^{3/2}} \end{aligned}$$

Nous voyons sans difficulté que le déterminant de cette métrique est,  $g = -\pi^4 \frac{NW}{NW+4\hat{\alpha}}$ . Il est aussi facile d'obtenir pour cette  $g_{ab}(n, w, N, W)$  que la courbure scalaire de Ruppenier est simplement:  $R = \frac{3}{2\pi NW} \frac{2\hat{\alpha}+NW}{\sqrt{nw(NW+4\hat{\alpha})}}$ , qu'elle est partout régulière. On voit que cette courbure scalaire de Ruppenier est nulle pour tous les  $(N, W)$  tel que  $NW = -2\hat{\alpha}$ , qui est possible si et seulement si  $\hat{\alpha} < 0$ . Il est aussitôt de voir que sans les corrections d' $\alpha'$ , le déterminant et la courbure scalaire de métrique  $g_{ab}(n, w, N, W)$  sont respectivement  $g = -\pi^4$  et  $R = \frac{3}{2\pi\sqrt{nw}NW}$ . Ce sont bien connue dans la géométrie de Ruppenier avec quatre charges sans les corrections d' $\alpha'$ , voir [47] pour le détails. En outre, cela reste toute vraie aussi pour le cas des trous noirs extrémaux non-supersymétriques en quatre dimensions que nous avons analysé dans la sous-section suivante. Et bien aussi, voir dans la sous-section 6.2 sans les corrections d' $\alpha'$  pour les branes noirs  $D_2 D_6 N S_5$  non-extrémaux en dimensions  $D = 10$  de l'espace-temps.

## 5.2 La géométrie de Ruppenier des trous noirs dyoniques extrémaux non-supersymétriques en quatre dimensions.

Nous sommes maintenant en mesure de calculer les contributions perturbatives d' $\alpha'$  à la géométrie de Ruppenier pour les trous noirs dyoniques extrémaux non-

supersymétriques en quatre dimensions. Il est bien connu que l'entropie des trous noirs extrémaux supersymétriques et bien aussi les trous noirs non supersymétriques dans la théorie des supergravités en  $\mathcal{N} = 2$  en quatre dimensions avec les corrections des dérivées supérieures peut être calculée facilement par la méthode de la fonction d'entropie de Sen [83]. En particulier, les trous noirs extrémaux dans le modèle de STU avec trois multiplets de vecteurs peuvent être écrits d'un sous-secteur d'énergie faible de l'action effective pour la théorie des cordes hétérotiques au niveau d'arbre sur le  $T^6$  ou  $K_3 \times T^2$ . Nous savons que cette médèle contient également les trous noirs extrémaux supersymétriques et aussi les trous noirs extrémaux non-supersymétriques. Surtout, on peut obtenir ces trous noirs des valeurs différentes de charges vecteurs. Il est intéressant que l'entropie de ces trous noirs peut être obtenue par extrémisation de la fonction d'entropie. Alors, au niveau d'arbre de la théorie des cordes hétérotiques, nous avons une forme simple de l'entropie d'un trou noir extrémal non-supersymétrique qui est peut être donnée généralement par la méthode de la fonction d'entropie [11]. Par souci de simplicité, considérons les vecteurs des charges avec  $N', W', \hat{n} > 0$  et  $\hat{w} < 0$  de la forme:

$$Q = \begin{pmatrix} \hat{n} \\ 0 \\ \hat{w} \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } Q = \begin{pmatrix} 0 \\ W' \\ 0 \\ N' \end{pmatrix}.$$

Ensuite, avec les normes de la supersymétrie de  $\mathcal{N} = 2$  et celles de  $\mathcal{N} = 4$ , les relations entre les champs scalaires, il s'avère que dans ce cas de  $(\hat{n}, \hat{w}, N', W')$  le résultat d'entropie d'un trou noir extrémal non-supersymétrique est [11]:  $S_{BH}^{ns} = 2\pi\sqrt{|\hat{n}\hat{w}|N'W'}$ . Maintenant nous définissons la géométrie thermodynamique avec un vecteur,  $\vec{N} := (n, w, N, W)$ , où  $w = |\hat{w}|$ . Ici, le  $\vec{N}$  paramétrise l'entropie ci-dessus comme:  $S_{BH}^{ns} = 2\pi\sqrt{nwNW}$  et écarte les calculs de la géométrie thermodynamique. Donc, avec ces quatre charges électriques et magnétiques, on peut écrire simplement que les composantes de la métrique de Ruppenier associées avec cet entropie sont données par:

$$\begin{aligned} g_{nn} &= \frac{\pi}{2n} \sqrt{\frac{wNW}{n}} \\ g_{nw} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{NW}{nw}} \\ g_{nN} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{wW}{nN}} \\ g_{nW} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{wN}{nW}} \\ g_{ww} &= \frac{\pi}{2w} \sqrt{\frac{nNW}{w}} \\ g_{wN} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{nW}{wN}} \\ g_{wW} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{nN}{wW}} \\ g_{NN} &= \frac{\pi}{2N} \sqrt{\frac{nwW}{N}} \\ g_{NW} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{nw}{NW}} \\ g_{WW} &= \frac{\pi}{2W} \sqrt{\frac{nwN}{W}} \end{aligned}$$

Il est très claire de voir que le déterminant du tenseur métrique est,  $g = -\pi^4$ . Et bien, nous pouvons également facilement obtenir avec cette métrique  $g_{ab}(n, w, N, W)$  que la courbure scalaire de Ruppenier est donnée par:  $R = \frac{3}{2\pi\sqrt{nwNW}}$ , qu'elle est partout régulière. Par conséquent, sans les corrections d' $\alpha'$ , les trous noirs dyoniques extrémaux non-supersymétriques ont aussi le même déterminant de la métrique et la même courbure scalaire de Ruppenier des trous noirs dyoniques extrémaux supersymétriques, comme nous les avons vus dans la sous-section

précédente. Maintenant, nous allons examiner les corrections dans cette géométrie, en considérant des corrections d' $\alpha'$  au niveau d'arbre de la théorie des supercordes par l'action effective. Soit  $\hat{\alpha}$  le coefficient des dérivées supérieures, alors avec les contributions d'ordre premier de la théorie des supercordes à l'action effective donnent que l'entropie d'un trou noir dyonique non-supersymétrique est donnée par [11]:  $S_{BH}^{ns} = 2\pi\sqrt{nwNW} + \frac{5\hat{\alpha}}{4}\sqrt{\frac{nw}{NW}}$ . On peut voir que les composantes de la métrique de Ruppenier sont:

$$\begin{aligned} g_{nn} &= \frac{\pi}{2n}\sqrt{\frac{wNW}{n}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16n}\sqrt{\frac{w}{nNW}}, \\ g_{nw} &= -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{NW}{nw}} - \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16\sqrt{nwNW}}, \\ g_{nN} &= -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{wW}{nN}} + \frac{5\pi w\hat{\alpha}}{16N\sqrt{nwNW}}, \\ g_{nW} &= -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{wN}{nW}} + \frac{5\pi w\hat{\alpha}}{16W\sqrt{nwNW}}, \\ g_{ww} &= \frac{\pi}{2w}\sqrt{\frac{nNW}{w}} + \frac{5\pi n\hat{\alpha}}{16w\sqrt{nwNW}}, \\ g_{wN} &= -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{nW}{wN}} + \frac{5\pi n\hat{\alpha}}{16N\sqrt{nwNW}}, \\ g_{wW} &= -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{nN}{wW}} + \frac{5\pi n\hat{\alpha}}{16W\sqrt{nwNW}}, \\ g_{NN} &= \frac{\pi}{2N}\sqrt{\frac{nwW}{N}} - \frac{15\pi\hat{\alpha}}{16N^2}\sqrt{\frac{nw}{NW}}, \\ g_{NW} &= -\pi\sqrt{\frac{nw}{NW}} - \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16NW}\sqrt{\frac{nw}{NW}}, \\ g_{WW} &= \frac{\pi}{2W}\sqrt{\frac{nwN}{W}} - \frac{15\pi\hat{\alpha}}{16W^2}\sqrt{\frac{nw}{NW}}. \end{aligned}$$

Nous pouvons voir que le déterminant du tenseur métrique est donné par:  $g = \frac{\pi^4}{4096(NW)^4}(625\hat{\alpha}^4 - 2000\hat{\alpha}^3(NW) + 5120\hat{\alpha}(NW)^3 - 4096(NW)^4)$ . En fait, il n'est pas difficile de voir que la courbure scalaire de Ruppenier est  $R = -\frac{96}{\pi}(\frac{NW}{nw})^{1/2}\{(625\hat{\alpha}^4 - 2000\hat{\alpha}^3(NW) + 5120\hat{\alpha}(NW)^3 - 4096(NW)^4)(25\hat{\alpha}^2 - 80\hat{\alpha}NW + 60(NW)^2)^{-2}\}[15625\hat{\alpha}^6 - 150000\hat{\alpha}^5NW + 600000\hat{\alpha}^4(NW)^2 - 1280000\hat{\alpha}^3(NW)^3 + 1536000\hat{\alpha}^2(NW)^4 - 983040\hat{\alpha}(NW)^5 + 262144(NW)^6]$ . Il peut sembler qu'il existe quelques divergences dans cette courbure scalaire de Ruppenier qui sont données par l'équation quadratique:  $25\hat{\alpha}^2 - 80\hat{\alpha}NW + 60(NW)^2 = 0$ . Mais il implique simplement qu'on a  $NW = (-8 \pm \sqrt{59})\frac{\hat{\alpha}}{12}$ . Et bien, pour la configuration des charges que nous avons considéré, Ça n'est pas possible parce que  $N, W > 0$ . En fait, ces divergences devient être vraiment possible si et seulement si  $\hat{\alpha} < 0$ . Mais nous avons considéré les vecteurs des charges avec  $N', W', \hat{n} > 0$  et  $\hat{w} < 0$ . Dans la suite, nous nous intéresserons uniquement à la cosideration d'un ordre supérieur prochain des corrections d' $\alpha'$ . Maintenant nous etudions thermodynamiquement cette correction suivante à l'entropie d'un trou noir dyonique non-supersymétrique [11]:  $S_{BH}^{ns} = 2\pi\sqrt{nwNW} + \frac{5\hat{\alpha}}{4}\sqrt{\frac{nw}{NW}} - \frac{29\pi\hat{\alpha}^2}{64}\frac{\sqrt{nw}}{(NW)^{3/2}}$ . Maintenant, les composantes de la métrique de Ruppenier sont:

$$\begin{aligned} g_{nn} &= \frac{\pi}{2n}\sqrt{\frac{wNW}{n}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16n}\sqrt{\frac{w}{nNW}} - \frac{29\pi\hat{\alpha}^2}{256nNW}\sqrt{\frac{w}{nNW}}, \\ g_{nw} &= -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{NW}{nw}} - \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16\sqrt{nwNW}} + \frac{29\pi\hat{\alpha}^2}{256NW\sqrt{nwNW}}, \\ g_{nN} &= -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{wW}{nN}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16NW}\sqrt{\frac{wW}{nN}} - \frac{87\pi\hat{\alpha}^2}{256(NW)^2}\sqrt{\frac{wW}{nN}}, \\ g_{nW} &= -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{wN}{nW}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16NW}\sqrt{\frac{wN}{nW}} - \frac{87\pi\hat{\alpha}^2}{256(NW)^2}\sqrt{\frac{wN}{nW}}, \\ g_{ww} &= \frac{\pi}{2w}\sqrt{\frac{nNW}{w}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16w}\sqrt{\frac{n}{wNW}} - \frac{29\pi\hat{\alpha}^2}{256wNW}\sqrt{\frac{n}{wNW}}, \\ g_{wN} &= -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{nW}{wN}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16N}\sqrt{\frac{n}{wNW}} - \frac{87\pi\hat{\alpha}^2}{256(N^2W)}\sqrt{\frac{n}{wNW}}, \\ g_{wW} &= -\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{nN}{wW}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16NW}\sqrt{\frac{nN}{wW}} - \frac{87\pi\hat{\alpha}^2}{256(NW)^2}\sqrt{\frac{nN}{wW}}, \end{aligned}$$



$$\begin{aligned}
g_{NN} &= \frac{\pi}{2N} \sqrt{\frac{nwW}{N}} - \frac{15\pi\hat{\alpha}}{16N^2} \sqrt{\frac{nw}{NW}} + \frac{435\pi\hat{\alpha}^2}{256(N^3W)} \sqrt{\frac{nN}{wW}}, \\
g_{NW} &= -\pi \sqrt{\frac{nw}{NW}} - \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16NW} \sqrt{\frac{nw}{NW}} + \frac{261\pi\hat{\alpha}^2}{256(NW)^2} \sqrt{\frac{nw}{NW}}, \\
g_{WW} &= \frac{\pi}{2W} \sqrt{\frac{nwN}{W}} - \frac{15\pi\hat{\alpha}}{16W^2} \sqrt{\frac{nw}{NW}} + \frac{435\pi\hat{\alpha}^2}{256(NW^3)} \sqrt{\frac{nw}{NW}}.
\end{aligned}$$

On voit sans problème que le déterminant du tenseur métrique est:

$$g = \frac{\pi^4}{268435456(NW)^8} (-a_0^{(2)}(NW)^8 + a_1^{(2)}\hat{\alpha}(NW)^7 - a_2^{(2)}\hat{\alpha}^2(NW)^6 + a_3^{(2)}\hat{\alpha}^3(NW)^5 + a_4^{(2)}\hat{\alpha}^4(NW)^4 - a_5^{(2)}\hat{\alpha}^5(NW)^3 + a_6^{(2)}\hat{\alpha}^6(NW)^2 - a_7^{(2)}\hat{\alpha}^7(NW) + a_8^{(2)}\hat{\alpha}^8); \text{ où les constantes réels positifs } \{a_i^{(2)}\} \text{ sont données dans l'annex [C].}$$

Finalement, nous pourrions bien sûr refaire le même genre de calcul avec cette  $g_{ab}(n, w, N, W)$ . En fait, nous obtenons que la courbure scalaire de Ruppenier est donnée par:

$$\begin{aligned}
R &= -\frac{192}{\pi}(NW)\left(\frac{NW}{nw}\right)^{1/2} \{-a_0^{(2)}(NW)^8 + a_1^{(2)}\hat{\alpha}(NW)^7 - a_2^{(2)}\hat{\alpha}^2(NW)^6 + a_3^{(2)}\hat{\alpha}^3(NW)^5 + a_4^{(2)}\hat{\alpha}^4(NW)^4 - a_5^{(2)}\hat{\alpha}^5(NW)^3 + a_6^{(2)}\hat{\alpha}^6(NW)^2 - a_7^{(2)}\hat{\alpha}^7(NW) + a_8^{(2)}\hat{\alpha}^8\} - 3[b_0^{(2)}(NW)^{22} - b_1^{(2)}(NW)^{21}\hat{\alpha} + b_2^{(2)}(NW)^{20}\hat{\alpha}^2 - b_3^{(2)}(NW)^{19}\hat{\alpha}^3 + b_4^{(2)}(NW)^{18}\hat{\alpha}^4 - b_5^{(2)}(NW)^{17}\hat{\alpha}^5 + b_6^{(2)}(NW)^{16}\hat{\alpha}^6 + b_7^{(2)}(NW)^{15}\hat{\alpha}^7 - b_8^{(2)}(NW)^{14}\hat{\alpha}^8 + b_9^{(2)}(NW)^{13}\hat{\alpha}^9 - b_{10}^{(2)}(NW)^{12}\hat{\alpha}^{10} + b_{11}^{(2)}(NW)^{11}\hat{\alpha}^{11} - b_{12}^{(2)}(NW)^{10}\hat{\alpha}^{12} - b_{13}^{(2)}(NW)^9\hat{\alpha}^{13} + b_{14}^{(2)}(NW)^8\hat{\alpha}^{14} - b_{15}^{(2)}(NW)^7\hat{\alpha}^{15} + b_{16}^{(2)}(NW)^6\hat{\alpha}^{16} - b_{17}^{(2)}(NW)^5\hat{\alpha}^{17} + b_{18}^{(2)}(NW)^4\hat{\alpha}^{18} - b_{19}^{(2)}(NW)^3\hat{\alpha}^{19} + b_{20}^{(2)}(NW)^2\hat{\alpha}^{20} - b_{21}^{(2)}(NW)\hat{\alpha}^{21} + b_{22}^{(2)}\hat{\alpha}^{22}]; \text{ où les constantes réels positifs } \{a_i^{(3)}\} \text{ et } \{b_i^{(3)}\} \text{ sont données dans l'annex [C].} \\
\text{On voit que cette curbure scalaire de Ruppenier est partout régulière. Ensuite nous enquêtons sur la géométrie thermodynamique avec les corrections d'}\alpha' \text{ d'un autre ordre supérieur prochain, l'entropie d'un trou noir dyonique non-supersymétriques est modifié à [11]: } S_{BH}^{ns} &= 2\pi\sqrt{nwNW} + \frac{5\hat{\alpha}}{4}\sqrt{\frac{nw}{NW}} - \frac{29\pi\hat{\alpha}^2}{64}\frac{\sqrt{nw}}{(NW)^{3/2}} - \frac{119\pi\hat{\alpha}^3}{512}\frac{\sqrt{nw}}{(NW)^{5/2}}. \text{ Cette fois, on voit que les composantes de la métrique de Ruppenier sont:}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{nn} &= \frac{\pi}{2n} \sqrt{\frac{wNW}{n}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16n} \sqrt{\frac{w}{nNW}} - \frac{29\pi\hat{\alpha}^2}{256nNW} \sqrt{\frac{w}{nNW}} - \frac{119\pi\hat{\alpha}^3}{2048n(NW)^2} \sqrt{\frac{w}{nNW}}, \\
g_{nw} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{NW}{nw}} - \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16\sqrt{nwNW}} + \frac{29\pi\hat{\alpha}^2}{256NW\sqrt{nwNW}} + \frac{119\pi\hat{\alpha}^3}{2048(NW)^2\sqrt{nwNW}}, \\
g_{nN} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{wW}{nN}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16NW} \sqrt{\frac{wW}{nN}} - \frac{87\pi\hat{\alpha}^2}{256(NW)^2} \sqrt{\frac{wW}{nN}} - \frac{595\pi\hat{\alpha}^3}{2048(NW)^3} \sqrt{\frac{wW}{nN}}, \\
g_{nW} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{wN}{nW}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16NW} \sqrt{\frac{wN}{nW}} - \frac{87\pi\hat{\alpha}^2}{256(NW)^2} \sqrt{\frac{wN}{nW}} - \frac{595\pi\hat{\alpha}^3}{2048(NW)^3} \sqrt{\frac{wN}{nW}}, \\
g_{ww} &= \frac{\pi}{2w} \sqrt{\frac{nNW}{w}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16w} \sqrt{\frac{n}{wNW}} - \frac{29\pi\hat{\alpha}^2}{256wNW} \sqrt{\frac{n}{wNW}} - \frac{119\pi\hat{\alpha}^3}{2048w(NW)^2} \sqrt{\frac{n}{wNW}}, \\
g_{wN} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{NW}{wN}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16NW} \sqrt{\frac{NW}{wN}} - \frac{87\pi\hat{\alpha}^2}{256(NW)^2} \sqrt{\frac{NW}{wN}} - \frac{595\pi\hat{\alpha}^3}{2048(NW)^3} \sqrt{\frac{NW}{wN}}, \\
g_{wW} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{nN}{wW}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16NW} \sqrt{\frac{nN}{wW}} - \frac{87\pi\hat{\alpha}^2}{256(NW)^2} \sqrt{\frac{nN}{wW}} - \frac{595\pi\hat{\alpha}^3}{2048(NW)^3} \sqrt{\frac{nN}{wW}}, \\
g_{NN} &= \frac{\pi}{2N} \sqrt{\frac{nwW}{N}} - \frac{15\pi\hat{\alpha}}{16N^2} \sqrt{\frac{nw}{NW}} + \frac{435\pi\hat{\alpha}^2}{256(N^3W)} \sqrt{\frac{nw}{NW}} + \frac{4165\pi\hat{\alpha}^3}{2048(N^4W^2)} \sqrt{\frac{nw}{NW}}, \\
g_{NW} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{nw}{NW}} - \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16NW} \sqrt{\frac{nw}{NW}} + \frac{261\pi\hat{\alpha}^2}{256(NW)^2} \sqrt{\frac{nw}{NW}} + \frac{2975\pi\hat{\alpha}^3}{2048(NW)^3} \sqrt{\frac{nw}{NW}}, \\
g_{WW} &= \frac{\pi}{2W} \sqrt{\frac{nwN}{W}} - \frac{15\pi\hat{\alpha}}{16W^2} \sqrt{\frac{nw}{NW}} + \frac{435\pi\hat{\alpha}^2}{256(NW^3)} \sqrt{\frac{nw}{NW}} + \frac{4165\pi\hat{\alpha}^3}{2048(N^2W^4)} \sqrt{\frac{nw}{NW}}.
\end{aligned}$$

Il n'est pas aussi difficile de voir que le déterminant de la métrique est:

$$g = \frac{\pi^4}{109951162776(NW)^{12}} (-a_0^{(3)}(NW)^{12} + a_1^{(3)}(NW)^{11}\hat{\alpha} - a_2^{(3)}(NW)^{10}\hat{\alpha}^2 - a_3^{(3)}(NW)^9\hat{\alpha}^3 + a_4^{(3)}(NW)^8\hat{\alpha}^4 - a_5^{(3)}(NW)^7\hat{\alpha}^5 - a_6^{(3)}(NW)^6\hat{\alpha}^6 + a_7^{(3)}(NW)^5\hat{\alpha}^7 - a_8^{(3)}(NW)^4\hat{\alpha}^8 - a_9^{(3)}(NW)^3\hat{\alpha}^9 + a_{10}^{(3)}(NW)^2\hat{\alpha}^{10} + a_{11}^{(3)}(NW)\hat{\alpha}^{11} + a_{12}^{(3)}\hat{\alpha}^{12}), \text{ où les constantes réels positifs } \{a_i^{(3)}\} \text{ sont données dans l'annex [C].}$$

Et bien encore cette fois, nous voyons avec cette  $g_{ab}(n, w, N, W)$  que la courbure scalaire de Ruppenier est partout régulière et

donnée par:

$$R = -\frac{3072(NW)^2}{\pi} \sqrt{\frac{NW}{nw}} \{ -a_0^{(3)}(NW)^{12} + a_1^{(3)}(NW)^{11}\hat{\alpha} - a_2^{(3)}(NW)^{10}\hat{\alpha}^2 - a_3^{(3)}(NW)^9\hat{\alpha}^3 + a_4^{(3)}(NW)^8\hat{\alpha}^4 - a_5^{(3)}(NW)^7\hat{\alpha}^5 - a_6^{(3)}(NW)^6\hat{\alpha}^6 + a_7^{(3)}(NW)^5\hat{\alpha}^7 - a_8^{(3)}(NW)^4\hat{\alpha}^8 - a_9^{(3)}(NW)^3\hat{\alpha}^9 + a_{10}^{(3)}(NW)^2\hat{\alpha}^{10} + a_{11}^{(3)}(NW)\hat{\alpha}^{11} + a_{12}^{(3)}\hat{\alpha}^{12} \} - 3[b_0^{(3)}(NW)^{33} - b_1^{(3)}(NW)^{32}\hat{\alpha} + b_2^{(3)}(NW)^{31}\hat{\alpha}^2 - b_3^{(3)}(NW)^{30}\hat{\alpha}^3 + b_4^{(3)}(NW)^{29}\hat{\alpha}^4 + b_5^{(3)}(NW)^{28}\hat{\alpha}^5 - b_6^{(3)}(NW)^{27}\hat{\alpha}^6 + b_7^{(3)}(NW)^{26}\hat{\alpha}^7 + b_8^{(3)}(NW)^{25}\hat{\alpha}^8 - b_9^{(3)}(NW)^{24}\hat{\alpha}^9 + b_{10}^{(3)}(NW)^{23}\hat{\alpha}^{10} + b_{11}^{(3)}(NW)^{22}\hat{\alpha}^{11} - b_{12}^{(3)}(NW)^{21}\hat{\alpha}^{12} + b_{13}^{(3)}(NW)^{20}\hat{\alpha}^{13} + b_{14}^{(3)}(NW)^{19}\hat{\alpha}^{14} - b_{15}^{(3)}(NW)^{18}\hat{\alpha}^{15} + b_{16}^{(3)}(NW)^{17}\hat{\alpha}^{16} + b_{17}^{(3)}(NW)^{16}\hat{\alpha}^{17} - b_{18}^{(3)}(NW)^{15}\hat{\alpha}^{18} + b_{19}^{(3)}(NW)^{14}\hat{\alpha}^{19} + b_{20}^{(3)}(NW)^{13}\hat{\alpha}^{20} - b_{21}^{(3)}(NW)^{12}\hat{\alpha}^{21} + b_{22}^{(3)}(NW)^{11}\hat{\alpha}^{22} + b_{23}^{(3)}(NW)^{10}\hat{\alpha}^{23} - b_{24}^{(3)}(NW)^9\hat{\alpha}^{24} - b_{25}^{(3)}(NW)^8\hat{\alpha}^{25} + b_{26}^{(3)}(NW)^7\hat{\alpha}^{26} - b_{27}^{(3)}(NW)^6\hat{\alpha}^{27} - b_{28}^{(3)}(NW)^5\hat{\alpha}^{28} - b_{29}^{(3)}(NW)^4\hat{\alpha}^{29} + b_{30}^{(3)}(NW)^3\hat{\alpha}^{30} + b_{31}^{(3)}(NW)^2\hat{\alpha}^{31} + b_{32}^{(3)}(NW)\hat{\alpha}^{32} + b_{33}^{(3)}\hat{\alpha}^{33}], où les constantes réels positifs  $\{a_i^{(3)}\}$  et  $\{b_i^{(3)}\}$  sont données dans l'annex [C]. Bien que'on ait encore le même résultat que la courbure scalaire de Ruppenier est partout régulière. Mais comment elle se comporte avec une prochaine corrections d' $\alpha'$ ? Pour voir ça, considérons les corrections suivantes d' $\alpha'$  dans l'entropie du trou noir dyonique non-supersymétrique, on l'a modifié à [11]:  $S_{BH}^s = 2\pi\sqrt{nwNW} + \frac{5\hat{\alpha}}{4}\sqrt{\frac{nw}{NW}} - \frac{29\pi\hat{\alpha}^2}{64}\frac{\sqrt{nw}}{(NW)^{3/2}} - \frac{119\pi\hat{\alpha}^3}{512}\frac{\sqrt{nw}}{(NW)^{5/2}} - \frac{2237\pi\hat{\alpha}^4}{16384}\frac{\sqrt{nw}}{(NW)^{7/2}}$ . Dans ce cas de l'entropie du trou noir, il est également facile d'obtenir que les composantes de la métrique de Ruppenier sont:$$

$$\begin{aligned} g_{nn} &= \frac{\pi}{2n} \sqrt{\frac{wNW}{n}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16n} \sqrt{\frac{w}{nNW}} - \frac{29\pi\hat{\alpha}^2}{256nNW} \sqrt{\frac{w}{nNW}} - \frac{119\pi\hat{\alpha}^3}{2048n(NW)^2} \sqrt{\frac{w}{nNW}} - \frac{2237\pi\hat{\alpha}^4}{65536n(NW)^3} \sqrt{\frac{w}{nNW}}, \\ g_{nw} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{NW}{nw}} - \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16\sqrt{nwNW}} + \frac{29\pi\hat{\alpha}^2}{256NW\sqrt{nwNW}} + \frac{119\pi\hat{\alpha}^3}{2048(NW)^2\sqrt{nwNW}} + \frac{2237\pi\hat{\alpha}^4}{65536(NW)^3\sqrt{nwNW}}, \\ g_{nN} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{wW}{nN}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16NW} \sqrt{\frac{wW}{nN}} - \frac{87\pi\hat{\alpha}^2}{256(NW)^2} \sqrt{\frac{wW}{nN}} - \frac{595\pi\hat{\alpha}^3}{2048(NW)^3} \sqrt{\frac{wW}{nN}} - \frac{15695\pi\hat{\alpha}^4}{65536(NW)^4} \sqrt{\frac{wW}{nN}}, \\ g_{nW} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{wN}{nW}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16NW} \sqrt{\frac{wN}{nW}} - \frac{87\pi\hat{\alpha}^2}{256(NW)^2} \sqrt{\frac{wN}{nW}} - \frac{595\pi\hat{\alpha}^3}{2048(NW)^3} \sqrt{\frac{wN}{nW}} - \frac{15659\pi\hat{\alpha}^4}{65536(NW)^4} \sqrt{\frac{wN}{nW}}, \\ g_{ww} &= \frac{\pi}{2w} \sqrt{\frac{nNW}{w}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16w} \sqrt{\frac{n}{wNW}} - \frac{29\pi\hat{\alpha}^2}{256wNW} \sqrt{\frac{n}{wNW}} - \frac{119\pi\hat{\alpha}^3}{2048w(NW)^2} \sqrt{\frac{n}{wNW}} - \frac{2237\pi\hat{\alpha}^4}{65536w(NW)^3} \sqrt{\frac{n}{wNW}}, \\ g_{wN} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{nW}{wN}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16NW} \sqrt{\frac{nW}{wN}} - \frac{87\pi\hat{\alpha}^2}{256(NW)^2} \sqrt{\frac{nW}{wN}} - \frac{595\pi\hat{\alpha}^3}{2048(NW)^3} \sqrt{\frac{nW}{wN}} - \frac{15659\pi\hat{\alpha}^4}{65536(NW)^4} \sqrt{\frac{nW}{wN}}, \\ g_{wW} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{nW}{wW}} + \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16NW} \sqrt{\frac{nW}{wW}} - \frac{87\pi\hat{\alpha}^2}{256(NW)^2} \sqrt{\frac{nW}{wW}} - \frac{595\pi\hat{\alpha}^3}{2048(NW)^3} \sqrt{\frac{nW}{wW}} - \frac{15659\pi\hat{\alpha}^4}{65536(NW)^4} \sqrt{\frac{nW}{wW}}, \\ g_{NN} &= \frac{\pi}{2N} \sqrt{\frac{nwW}{N}} - \frac{15\pi\hat{\alpha}}{16N^2} \sqrt{\frac{nw}{NW}} + \frac{435\pi\hat{\alpha}^2}{256(N^3W)} \sqrt{\frac{nw}{NW}} + \frac{4165\pi\hat{\alpha}^3}{2048(N^4W^2)} \sqrt{\frac{nw}{NW}} + \frac{140931\pi\hat{\alpha}^4}{65536(N^5W^3)} \sqrt{\frac{nw}{NW}}, \\ g_{NW} &= -\frac{\pi}{2} \sqrt{\frac{nw}{NW}} - \frac{5\pi\hat{\alpha}}{16NW} \sqrt{\frac{nw}{NW}} + \frac{261\pi\hat{\alpha}^2}{256(NW)^2} \sqrt{\frac{nw}{NW}} + \frac{2975\pi\hat{\alpha}^3}{2048(NW)^3} \sqrt{\frac{nw}{NW}} + \frac{1099613\pi\hat{\alpha}^4}{65536(NW)^4} \sqrt{\frac{nw}{NW}}, \\ g_{WW} &= \frac{\pi}{2W} \sqrt{\frac{nwN}{W}} - \frac{15\pi\hat{\alpha}}{16W^2} \sqrt{\frac{nw}{NW}} + \frac{435\pi\hat{\alpha}^2}{256(NW^3)} \sqrt{\frac{nw}{NW}} + \frac{4165\pi\hat{\alpha}^3}{2048(N^2W^4)} \sqrt{\frac{nw}{NW}} + \frac{140931\pi\hat{\alpha}^4}{65536(N^3W^5)} \sqrt{\frac{nw}{NW}}. \end{aligned}$$

On peut avoir facilement que le déterminant de cette métrique est:

$$g = \frac{\pi^4}{1152921504606846976(NW)^{16}} (-a_0^{(4)}(NW)^{16} + a_1^{(4)}(NW)^{15}\hat{\alpha} - a_2^{(4)}(NW)^{14}\hat{\alpha}^2 + a_3^{(4)}(NW)^{13}\hat{\alpha}^3 - a_4^{(4)}(NW)^{12}\hat{\alpha}^4 - a_5^{(4)}(NW)^{11}\hat{\alpha}^5 - a_6^{(4)}(NW)^{10}\hat{\alpha}^6 - a_7^{(4)}(NW)^8\hat{\alpha}^7 - a_8^{(4)}(NW)^8\hat{\alpha}^8 - a_9^{(4)}(NW)^7\hat{\alpha}^9 - a_{10}^{(4)}(NW)^6\hat{\alpha}^{10} - a_{11}^{(4)}(NW)^5\hat{\alpha}^{11} + a_{12}^{(4)}(NW)^4\hat{\alpha}^{12} - a_{13}^{(4)}(NW)^3\hat{\alpha}^{13} + a_{14}^{(4)}(NW)^2\hat{\alpha}^{14} + a_{15}^{(4)}(NW)\hat{\alpha}^{15} + a_{16}^{(4)}\hat{\alpha}^{16}), où les constantes réels positifs  $\{a_i^{(4)}\}$  sont données dans l'annex [C]. Et en fait, il n'est pas très difficile de voir que la courbure scalaire de Ruppenier est:$$

$$R = -\frac{49152}{\pi} \sqrt{\frac{(NW)^7}{nw}} \{ -a_0^{(4)}(NW)^{16} + a_1^{(4)}(NW)^{15}\hat{\alpha} - a_2^{(4)}(NW)^{14}\hat{\alpha}^2 + a_3^{(4)}(NW)^{13}\hat{\alpha}^3 - a_4^{(4)}(NW)^{12}\hat{\alpha}^4 - a_5^{(4)}(NW)^{11}\hat{\alpha}^5 - a_6^{(4)}(NW)^{10}\hat{\alpha}^6 - a_7^{(4)}(NW)^8\hat{\alpha}^7 - a_8^{(4)}(NW)^8\hat{\alpha}^8 - a_9^{(4)}(NW)^7\hat{\alpha}^9 - a_{10}^{(4)}(NW)^6\hat{\alpha}^{10} - a_{11}^{(4)}(NW)^5\hat{\alpha}^{11} + a_{12}^{(4)}(NW)^4\hat{\alpha}^{12} - a_{13}^{(4)}(NW)^3\hat{\alpha}^{13} +$$

$a_{14}^{(4)}(NW)^2\hat{\alpha}^{14} + a_{15}^{(4)}(NW)\hat{\alpha}^{15} + a_{16}^{(4)}\hat{\alpha}^{16}\} - 3[b_0^{(4)}(NW)^{44} - b_1^{(4)}(NW)^{43}\hat{\alpha} + b_2^{(4)}(NW)^{42}\hat{\alpha}^2 -$   
 $b_3^{(4)}(NW)^{41}\hat{\alpha}^3 + b_4^{(4)}(NW)^{40}\hat{\alpha}^4 + b_5^{(4)}(NW)^{39}\hat{\alpha}^5 + b_6^{(4)}(NW)^{38}\hat{\alpha}^6 + b_7^{(4)}(NW)^{37}\hat{\alpha}^7 +$   
 $b_8^{(4)}(NW)^{36}\hat{\alpha}^8 + b_9^{(4)}(NW)^{35}\hat{\alpha}^9 + b_{10}^{(4)}(NW)^{34}\hat{\alpha}^{10} + b_{11}^{(4)}(NW)^{33}\hat{\alpha}^{11} + b_{12}^{(4)}(NW)^{32}\hat{\alpha}^{12} +$   
 $b_{13}^{(4)}(NW)^{31}\hat{\alpha}^{13} + b_{14}^{(4)}(NW)^{30}\hat{\alpha}^{14} + b_{15}^{(4)}(NW)^{29}\hat{\alpha}^{15} + b_{16}^{(4)}(NW)^{28}\hat{\alpha}^{16} + b_{17}^{(4)}(NW)^{27}\hat{\alpha}^{17} +$   
 $b_{18}^{(4)}(NW)^{26}\hat{\alpha}^{18} + b_{19}^{(4)}(NW)^{25}\hat{\alpha}^{19} + b_{20}^{(4)}(NW)^{24}\hat{\alpha}^{20} + b_{21}^{(4)}(NW)^{23}\hat{\alpha}^{21} + b_{22}^{(4)}(NW)^{22}\hat{\alpha}^{22} +$   
 $b_{23}^{(4)}(NW)^{21}\hat{\alpha}^{23} + b_{24}^{(4)}(NW)^{20}\hat{\alpha}^{24} + b_{25}^{(4)}(NW)^{19}\hat{\alpha}^{25} + b_{26}^{(4)}(NW)^{18}\hat{\alpha}^{26} + b_{27}^{(4)}(NW)^{17}\hat{\alpha}^{27} +$   
 $b_{28}^{(4)}(NW)^{16}\hat{\alpha}^{28} + b_{29}^{(4)}(NW)^{15}\hat{\alpha}^{29} - b_{30}^{(4)}(NW)^{14}\hat{\alpha}^{30} - b_{31}^{(4)}(NW)^{13}\hat{\alpha}^{31} - b_{32}^{(4)}(NW)^{12}\hat{\alpha}^{32} -$   
 $b_{33}^{(4)}(NW)^{11}\hat{\alpha}^{33} - b_{34}^{(4)}(NW)^{10}\hat{\alpha}^{34} - b_{35}^{(4)}(NW)^9\hat{\alpha}^{35} - b_{36}^{(4)}(NW)^8\hat{\alpha}^{36} + b_{37}^{(4)}(NW)^7\hat{\alpha}^{37} +$   
 $b_{38}^{(4)}(NW)^6\hat{\alpha}^{38} + b_{39}^{(4)}(NW)^5\hat{\alpha}^{39} + b_{40}^{(4)}(NW)^4\hat{\alpha}^{40} + b_{41}^{(4)}(NW)^3\hat{\alpha}^{41} + b_{42}^{(4)}(NW)^2\hat{\alpha}^{42} +$   
 $b_{43}^{(4)}(NW)\hat{\alpha}^{43} + b_{44}^{(4)}\hat{\alpha}^{44}]$ , où les constantes réels positifs  $\{a_i^{(4)}\}$  et  $\{b_i^{(4)}\}$  sont données dans l'annex [C]. On voit clairement que la conclusion pour la courbure scalaire de Ruppenier reste la même qu'avant. On peut aussi facilement continuer ce type de calcul et on peut être généralement montrer que la conclusion restera la même, si bien qu'on ajoute les corrections suivantes d' $\alpha'$  dans l'entropie des trous noirs dyoniques non-supersymétriques extrémaux en quatre dimensions. De toute manière, sur la base d'un schéma général au-dessus des corrections d'ordres différents d' $\alpha'$  à la courbure scalaire de Ruppenier des trous noirs dyoniques non-supersymétriques extrémaux en quatre dimensions, nous pouvons voir qu'elle satisfait une observation suivante.

### 5.3 L'Observation: La nature de la courbure scalaire de Ruppenier d'après les corrections d' $\alpha'$ des trous noirs dyoniques extrémaux non-supersymétriques en quatre dimensions.

Soit  $l$  le plus grand exposant d' $\alpha'$  dans l'entropie des trous noirs dyoniques non-supersymétriques extrémaux en quatre dimensions. Ensuite  $\forall l > 1$ , nous pouvons écrire que la courbure de Ruppenier d'un trou noir dyonique non-supersymétrique extrémal en quatre dimensions peut être donnée par une formule générale:  $R^{(l)}(n, w, N, W) = -\frac{k}{\pi}(NW)^l \sqrt{\frac{NW}{nw}} f_1(NW)^{-3} f_2(NW)$ , où  $k$  est une constante réelle et le degré des fonctions polynomiales  $f_1(NW)$  et  $f_2(NW)$  sont déterminées par le plus grand exposant d' $\alpha'$  se figurant à l'entropie de ce trou noir. Soient les degrés de fonctions  $f_1(NW)$  et  $f_2(NW)$  sont respectivement  $l_1$  et  $l_2$ , c'est à dire que  $\deg(f_1) = l_1$  et  $\deg(f_2) = l_2$  tels que la courbure scalaire de Ruppenier sans les corrections des dérivées supérieures d' $\alpha'$  peut être écrite proportionnelle à  $(nwNW)^{-1/2}$ . C'est-à-dire quand on n'ajoute pas les corrections d' $\alpha'$ , la courbure scalaire de Ruppenier doit être comme:  $R = 3/(2\pi\sqrt{nwNW})$ . Ensuite, on doit avoir:  $l_2 - 3l_1 = l$ . Nous pouvons observer à partir des courbures de Ruppenier ce qui précèdent qu'on a  $l_1 = 4l$ . Afin que nous ayons une formule simple suivante pour le degré de l'autre fonction  $f_2$  donnée par juste:  $l_2 = 11l$ . Donc, nous avons le degré de la fonction  $f_2(NW)$  qui est  $\deg(f_2) = 11l$ .

De cette façon, à tout ordre des corrections d' $\alpha'$  à l'entropie des trous noirs non-supersymétriques extrémaux, nous pouvons déterminer facilement toutes les propriétés de l'espace d'états de la géométrie thermodynamique. De plus, le degré du déterminant de la métrique de Ruppenier et celui de la numérateur de la courbure scalaire de Ruppenier correspondante sont respectivement  $4l$  et  $11l$ . Notez que notre observation n'est pas valable pour le cas de  $l = 1$ . En fait,  $\forall \hat{\alpha} > 0$ , nous pouvons voir dans le cas de  $l = 1$  qu'il n'est pas stable parce que  $N, W$  sont positives, ce que nous considérons thermodynamique géométriquement que l'entropie du trou noir doit être corrigée, parce qu'un trou noir extrémal peut être vu comme une collection d'états quantiques de BPS qui est un objet assez stable. Donc, pour

tout ordre arbitraire  $l$  des corrections d' $\alpha'$  dans l'entropie des trous noirs non-supersymétriques extrémaux en quatre dimensions, la géométrie de Ruppenier est bien définie et partout régulière. Notre conjecture de l'observation est comme une conclusion qui peut être énoncée comme suivante:

**L'Observation:** À tout ordre  $l$  des corrections d' $\alpha'$  grand qu'un, la courbure scalaire de Ruppenier des trous noirs dyoniques non-supersymétriques extrémaux en quatre dimensions est donnée par une formule générale:  $R^{(l)}(n, w, N, W) = -\frac{k}{\pi}(NW)^l \sqrt{\frac{NW}{nw}} f_1(NW)^{-3} f_2(NW)$ , où les degrés de fonctions  $f_1(NW)$  et  $f_2(NW)$  sont respectivement  $4l$  et  $11l$ .

## 6 La géométrie de Ruppenier des solutions non-extrémales de branes $D_1D_5$ et $D_2D_6NS_5$ en dimensions $D = 10$ .

Dans cette section, nous considérons les solutions non-extrémales de branes  $D_1D_5$  et  $D_2D_6NS_5$  en  $D = 10$  de l'action effective de la théorie des cordes de type-II. Ces solutions non-extrémales de branes sont obtenues par l'application de la fonction de l'entropie par Ahmad Ghodsi et. al. [16]. Ces systèmes de branes noirs sont le plus simple système pour lesquels, il est immédiat d'analyser la géométrie thermodynamique. Ceux sont les branes noirs non-extrémaux avec trois et quatre charges. En d'autres termes, nous considérons les solutions non-extrémales de branes  $D_1D_5$  et  $D_2D_6NS_5$  découlant de l'action effective de la théorie des cordes de type-II [84]. Le contenu du champ de l'action effectif dans le cadre des cordes sont le champ de dilaton, le champ de NS-NS, le champ d'autoduale de R-R. Ultérieurement, l'application du formalisme de la fonction de l'entropie peut être faite pour les deux solutions non-extrémales de branes  $D_1D_5$  et  $D_2D_6NS_5$  dans l'approximation de la gorge, où ces solutions de branes sont respectivement les trous noirs de Schwarzschild dans  $AdS_3 \times S^3 \times T_4$  et  $AdS_3 \times S^2 \times S^1 \times T_4$ . De plus, nous voudrions voir, comment les corrections d' $\alpha'$  modifient la géométrie thermodynamique pour les solutions non-extrémales de branes  $D_1D_5$  et  $D_2D_6NS_5$ .

### 6.1 La géométrie de Ruppenier des solutions non-extrémales de branes $D_1D_5$ :

Dans cette sous-section, nous analysons la géométrie de Ruppenier des branes  $D_1D_5$  non-extrémaux. La solution non-extrémales des branes  $D_1D_5$  peut être décrite en prenant le champ de dilaton et les deux champs de RR:  $C_2, C_6$  dans la théorie effective de type-IIB. Cette configuration peut être décrite pour les moments du mouvement de droit et ceux de gauche en égalité et en considérant la brane  $D_1$  dans la direction compacte de  $S^1$  et la brane  $D_5$  dans la direction compacte de  $S^1 \times T^4$ . Notez que l'horizon de cette solution se développe à  $r = r_0$  avec une géométrie de la gorge de  $S^3 \times T^4$  dans la limite de grande distance:  $r \ll Q_1$  et  $r \ll Q_2$  qui est un trou noir de Schwarzschild dans l' $AdS_3$ . En outre, cette solution se permet de réduire à la solution extrémale ordinaire des branes  $D_1D_5$  pour certaines valeur du paramètre  $r_0$  pour laquelle l'horizon est situé à  $r_0 = 0$ . L'analyse de la fonction de l'entropie au niveau des deux dérivés où bien avec les corrections d' $\alpha'$  aux quelles la géométrie près de l'horizon est  $S^1 \times S^3 \times T^4$ , donne l'entropie de ces systèmes de branes. Il est bien connu que l'entropie est proportionnelle à la fonction de l'entropie de Sen et au niveau des deux dérivés, l'entropie des solutions de branes  $D_1D_5$  est donnée par [16]:  $S_{BH}(N_1, N_5, N_R) := 4\pi\sqrt{N_1N_5N_R}$ . Donc, on

peut voir que les composantes de la métrique de Ruppenier sont données par,

$$\begin{aligned}
g_{N_1 N_1} &= \frac{\pi}{N_1} \sqrt{\frac{N_5 N_R}{N_1}} \\
g_{N_1 N_5} &= -\pi \sqrt{\frac{N_R}{N_1 N_5}} \\
g_{N_1 N_R} &= -\pi \sqrt{\frac{N_5}{N_1 N_R}} \\
g_{N_5 N_5} &= \frac{\pi}{N_5} \sqrt{\frac{N_1 N_R}{N_5}} \\
g_{N_5 N_R} &= -\pi \sqrt{\frac{N_1}{N_5 N_R}} \\
g_{N_R N_R} &= \frac{\pi}{N_R} \sqrt{\frac{N_1 N_5}{N_R}}
\end{aligned}$$

Nous voyons que le déterminant du tenseur métrique est,  $g = -4\pi^3(N_1 N_5 N_R)^{-1/2}$ . Et bien aussi, on voit que la courbure scalaire de Ruppenier est simplement,  $R = \frac{3}{8\pi}(N_1 N_5 N_R)^{-1/2}$  qu'elle est partout régulière.

Maintenant, examinons les effets de la théorie des cordes venant du tenseur de Weyl avec les corrections d' $\alpha'^3$ . L'analyse de la fonction de l'entropie peut être faite pour la contribution non nulle du tenseur de Weyl à l'entropie et ainsi la géométrie près de l'horizon peut être obtenues à l' $AdS_3 \times S^3 \times T^4$ , comme d'habitude. En particulier, en tenant compte de ces effets de la théorie des cordes, nous considérons les corrections des dérivées supérieures au niveau d' $(\alpha')^3$ . Soit  $\gamma = \frac{1}{8}\zeta(3)(\alpha')^3$  le coefficient de la contribution des dérivées supérieures à la densité lagrangienne effective. Alors, on peut obtenir l'entropie du  $D_1 D_5$    l'aide de la méthode de la fonction d'entropie de Sen [16]:  $S_{BH}(N_1, N_5, N_R) := 4\pi\sqrt{N_1 N_5 N_R} - \frac{4\pi b\sqrt{N_R}}{N_1 N_5}$  où  $b = \gamma(\frac{(2\pi)^3 V_4}{16\pi G_{10}})^{3/2}$ . Donc, nous voyons que les composantes de la métrique de Ruppenier sont données par,

$$\begin{aligned}
g_{N_1 N_1} &= \frac{\pi}{N_1} \sqrt{\frac{N_5 N_R}{N_1}} + \frac{8\pi b\sqrt{N_R}}{N_1^3 N_5}, \\
g_{N_1 N_5} &= -\pi \sqrt{\frac{N_R}{N_1 N_5}} + \frac{4\pi b\sqrt{N_R}}{N_1^2 N_5^2}, \\
g_{N_1 N_R} &= -\pi \sqrt{\frac{N_5}{N_1 N_R}} - \frac{2\pi b}{N_1^2 N_5 \sqrt{N_R}}, \\
g_{N_5 N_5} &= \frac{\pi}{N_5} \sqrt{\frac{N_1 N_R}{N_5}} + \frac{8\pi b\sqrt{N_R}}{N_1 N_5^3}, \\
g_{N_5 N_R} &= -\pi \sqrt{\frac{N_1}{N_5 N_R}} - \frac{2\pi b}{N_1 N_5^2 \sqrt{N_R}}, \\
g_{N_R N_R} &= \frac{\pi}{N_R} \sqrt{\frac{N_1 N_5}{N_R}} - \frac{\pi b}{N_1 N_5 N_R^{3/2}}.
\end{aligned}$$

Il n'est pas difficile de voir que le déterminant du tenseur métrique est donné par,  $g = -4\pi^3(N_1 N_5)^{-5}(N_1 N_5 N_R)^{-1/2}\{(N_1 N_5)^5 + 6b^2(N_1 N_5)^2 + 20b^3(N_1 N_5)^{1/2}\}$ . Et ensuite, on peut aussi avoir simplement que la courbure scalaire de Ruppenier est,  $R = \frac{3}{8\pi} \frac{(N_1 N_5)^2}{\sqrt{N_R}} \{(N_1 N_5)^5 + 6b^2(N_1 N_5)^2 + 20b^3(N_1 N_5)^{1/2}\}^{-3} \{(N_1 N_5)^{25/2} - 48b^4(N_1 N_5)^{13/2} + 8b^2(N_1 N_5)^{19/2} + 6520b^6(N_1 N_5)^{7/2} + 1700b^5(N_1 N_5)^5 - 1600b^3(N_1 N_5)^{1/2} + 1920b^7(N_1 N_5)^2 + 256b^3(N_1 N_5)^8 - 9b(N_1 N_5)^{11}\}$ . On voit qu'il n'y a pas des divergences dans l'espace d' tats et cette courbure scalaire de Ruppenier est partout régulière. Et bien aussi, on peut voir que la courbure scalaire de Ruppenier est devenue une fraction des fonctions polynômiales dans une variable définie par  $N := N_1 N_5$ . De plus, pour le cas des trous noirs extrémaux des deux charges avec  $N_R = 0$  avec ou sans les corrections d' $\alpha'$ , nous voyons que la géométrie sous-jacente de Ruppenier est partout mal-définie. En particulier, le déterminant et la courbure scalaire de la géométrie de Ruppenier agrandissent dans l'espace de l'état des branes noirs.

## 6.2 La géométrie de Ruppenier des solutions non-extrémales de branes $D_2D_6NS_5$ :

Dans cette sous-section, il est également intéressant d'analyser la géométrie de Ruppenier associée aux branes  $D_2D_6NS_5$  non-extrémales. Nous envisagerons maintenant les solutions non-extrémales de branes  $D_2D_6NS_5$  qui apparaissent dans l'action effective de la IIA, comme suit. Pour cette solution, nous pouvons considérer les branes de  $D_2$  dans le sens des directions compactes de  $S^1 \times S'^1$ , les branes de  $D_6$  dans des directions compactes de  $S^1 \times S'^1 \times T_4$  et les branes de  $NS_5$  dans des directions compactes de  $S^1 \times T_4$ , pour le détails voir [85, 2]. Le résultat est simplement que la géométrie est le produit de  $S^3 \times T_4$  avec le trou noir de Schwarzschild dans  $AdS_3$ . Afin d'appliquer le formalisme de la fonction de l'entropie aux branes  $D_2D_6NS_5$  non-extrémales, nous avons besoin de déformer la géométrie proche de l'horizon du système de ces branes d'une forme générale du produit de l'espace de  $S^1 \times S^2 \times T_4$  et l'espace d'AdS-Schwarzschild. En particulier, nous prenons en compte des propriétés des solutions non-extrémales de branes  $D_2D_6NS_5$ . Ensuite, la considération de la méthode de la fonction d'entropie donne l'entropie des branes de  $D_2D_6NS_5$  non-extrémales au niveau de l'ordre de deux dérivés. En termes des nombres de charges et moments de branes, nous pouvons écrire qu'au niveau des deux dérivés l'entropie est donnée par [16]:  $S_{BH}(N_2, N_6, N_5, N_R) := 4\pi\sqrt{N_2N_6N_5N_R}$ . Ainsi, il est immédiat que les composantes de la métrique de Ruppenier sont données par,

$$\begin{aligned} g_{N_2N_2} &= \frac{\pi}{N_2} \sqrt{\frac{N_6N_5N_R}{N_2}}, \\ g_{N_2N_6} &= -\pi \sqrt{\frac{N_5N_R}{N_2N_6}}, \\ g_{N_2N_5} &= -\pi \sqrt{\frac{N_6N_R}{N_2N_5}}, \\ g_{N_2N_R} &= -\pi \sqrt{\frac{N_6N_5}{N_2N_R}}, \\ g_{N_6N_6} &= \frac{\pi}{N_6} \sqrt{\frac{N_2N_5N_R}{N_6}}, \\ g_{N_6N_5} &= -\pi \sqrt{\frac{N_2N_R}{N_6N_5}}, \\ g_{N_6N_R} &= -\pi \sqrt{\frac{N_2N_5}{N_6N_R}}, \\ g_{N_5N_5} &= \frac{\pi}{N_5} \sqrt{\frac{N_2N_6N_R}{N_5}}, \\ g_{N_5N_R} &= -\pi \sqrt{\frac{N_2N_6}{N_5N_R}}, \\ g_{N_RN_R} &= \frac{\pi}{N_R} \sqrt{\frac{N_2N_6N_5}{N_R}}. \end{aligned}$$

Dans ce cas, le premier résultat est immédiat que le déterminant du tenseur métrique est,  $g = -16\pi^4$ . Donc, on voit ce qui est aussi très simple de voir que la courbure scalaire de Ruppenier est,  $R = \frac{3}{4\pi}(N_2N_6N_5N_R)^{-1/2}$  qu'elle est partout régulière. Cela, on peut également voir dans les sous-sections 5.1 et 5.2 avec une différence évidente, sans les corrections d' $\alpha'$ .

D'autre part, l'examen des contributions non nulle du tenseur de Weyl à la théorie effective de type-IIA, en respectant les symétries de solutions au niveau d'arbre nous permet d'analyser par la fonction d'entropie avec une horizon de  $(S^1 \times S'^1 \times S^2 \times T_4)$  et ensuite nous pouvons écrire l'entropie de la solution non-extrémale des branes  $D_2D_6NS_5$ . Dès que les termes des dérivées supérieures respectent la symétrie des solutions au niveau de l'arbre. Donc, cette fois encore, dans ce cas, l'entropie est corrigé pour être [16]:  $S_{BH}(N_2, N_6, N_5, N_R) := 4\pi\sqrt{N_2N_6N_5N_R} - \frac{4\pi b_1 \sqrt{N_R}}{N_2N_6N_5^{5/2}}$ , où  $b_1$  est un coefficient des contributions de dérivées supérieures d' $\alpha'$  à la densité lagrangienne effective. Maintenant, soit  $\mathcal{M}$  une variété riemannienne avec la métriques de Ruppenier  $g_{ij}$  ce qui peut être écrite comme,  $g_{ij} := g_{ij}^{(arbre)} + g_{ij}^{(b_1)}$ .

On peut naturellement rapporter la correction  $g_{ij}^{(b_1)}$  dans la métrique  $g_{ij}$ . C'est à dire qu'on a besoin d'apporter ces corrections à la métrique de cette variété de Ruppenier ce que la métrique de la  $\mathcal{M}$  soit proprement repérée au point des corrections d' $\alpha'$ . Ensuite, il est aisé de constater que les composantes de la métrique avec les contributions d' $\alpha'$  sont données par:

$$\begin{aligned}
g_{N_2 N_2} &= \frac{\pi}{N_2} \sqrt{\frac{N_6 N_5 N_R}{N_2}} + \frac{8\pi b_1 \sqrt{N_R}}{N_2^3 N_6 N_5^{5/2}}, \\
g_{N_2 N_6} &= -\pi \sqrt{\frac{N_5 N_R}{N_2 N_6}} + \frac{4\pi b_1 \sqrt{N_R}}{N_2^2 N_6^2 N_5^{5/2}}, \\
g_{N_2 N_5} &= -\pi \sqrt{\frac{N_6 N_R}{N_2 N_5}} + \frac{10\pi b_1 \sqrt{N_R}}{N_2^2 N_6 N_5^{7/2}}, \\
g_{N_2 N_R} &= -\pi \sqrt{\frac{N_6 N_5}{N_2 N_R}} - \frac{2\pi b_1}{N_2^2 N_6 N_5^{5/2} \sqrt{N_R}}, \\
g_{N_6 N_6} &= \frac{\pi}{N_6} \sqrt{\frac{N_2 N_5 N_R}{N_6}} + \frac{8\pi b_1 \sqrt{N_R}}{N_2 N_6^3 N_5^{5/2}}, \\
g_{N_6 N_5} &= -\pi \sqrt{\frac{N_2 N_R}{N_6 N_5}} + \frac{10\pi b_1 \sqrt{N_R}}{N_2 N_6^2 N_5^{7/2}}, \\
g_{N_6 N_R} &= -\pi \sqrt{\frac{N_2 N_5}{N_6 N_R}} - \frac{2\pi b_1}{N_2 N_6^2 N_5^{5/2} \sqrt{N_R}}, \\
g_{N_5 N_5} &= \frac{\pi}{N_5} \sqrt{\frac{N_2 N_6 N_R}{N_5}} + \frac{35\pi b_1 \sqrt{N_R}}{N_2 N_6 N_5^{9/2}}, \\
g_{N_5 N_R} &= -\pi \sqrt{\frac{N_2 N_6}{N_5 N_R}} - \frac{5\pi b_1}{N_2 N_6 N_5^{7/2} \sqrt{N_R}}, \\
g_{N_R N_R} &= \frac{\pi}{N_R} \sqrt{\frac{N_2 N_6 N_5}{N_R}} - \frac{\pi b_1}{N_2 N_6 N_5^{5/2} N_R^{3/2}}.
\end{aligned}$$

En fait, il est aussi immédiat que le déterminant du tenseur métrique  $g_{ij}$  est,  $g = -16\pi^4 (N_2 N_6 N_5^2)^{-6} \{ (N_2 N_6 N_5^2)^6 + 6b_1^2 (N_2 N_6 N_5^2)^3 + 100b_1^4 + 50b_1^3 (N_2 N_6 N_5^2)^{3/2} + 5b_1 (N_2 N_6 N_5^2)^{9/2} \}$ . Donc, on peut voir sans difficulté que la courbure scalaire de Ruppenier avec les corrections d' $\alpha'$  est,  $R = \frac{3}{8\pi} (N_2 N_6 N_5^{5/2} N_R^{-1/2}) \{ (N_2 N_6 N_5^2)^6 + 6b_1^2 (N_2 N_6 N_5^2)^3 + 100b_1^4 + 50b_1^3 (N_2 N_6 N_5^2)^{3/2} + 5b_1 (N_2 N_6 N_5^2)^{9/2} \}^{-3} \{ -114b_1^3 (N_2 N_6 N_5^2)^{12} + 26b_1 (N_2 N_6 N_5^2)^{15} + 178980b_1^7 (N_2 N_6 N_5^2)^6 + 3837b_1^4 (N_2 N_6 N_5^2)^{21/2} + 604500b_1^8 (N_2 N_6 N_5^2)^{9/2} + 47472b_1^6 (N_2 N_6 N_5^2)^{15/2} + 17b_1^2 (N_2 N_6 N_5^2)^{27/2} + 565000b_1^9 (N_2 N_6 N_5^2)^3 + 2(N_2 N_6 N_5^2)^{33/2} + 20280b_1^5 (N_2 N_6 N_5^2)^9 - 620000b_1^{10} (N_2 N_6 N_5^2)^{3/2} - 800000b_1^{11} \}$ . Nous voyons simplement que cette courbure scalaire de Ruppenier est partout régulière. Il est également à noter que ces solutions non-extrémales de branes ont toujours les mêmes nombre de moments égal à gauche et ceux à droite. De plus, la valeur correspondante de l'entropie est réduite et cell de la courbure scalaire de Ruppenier est devenue certaine fraction des fonctions polynômiales dans une variable définie, comme étant  $N := N_2 N_6 N_5^2$ . En outre, dans le cas des branes noirs de trois charges avec  $N_R \rightarrow 0$ , nous observons que, bien que la métrique de Ruppenier est bien-définie mais la courbure scalaire de Ruppenier agrandit jusqu'à l'infinie. Dans ce cas, il s'agit donc un exemple du système statistique de l'interaction infinie.

## 7 La géométrie de Ruppenier des trous noirs extrémaux en rotation en quatre dimensions:

Dans cette section, nous considérons les trous noirs en rotation ayant deux, trois et cinq paramètres. Il y a plusieurs systèmes thermodynamiques de trous noirs, en particulier le trou noir en rotation de Kerr-Newman et ceux de Kaluza-Klein chargé électriquement ou bien chargé électriquement et magnétiquement, qui sont les exemples importants considérés par Sen et. al.[14]. Bien sûr, dans les cas simples de la théories de la gravitation des deux dérivées, on a plusieurs exemples qui peuvent être illustrés. Mais ici, nous avons particulièrement intéressé par la théorie de la

gravité des dérivées supérieures, c'est tous, comme les trous noirs extrémaux de Kerr-Newman dans la théorie d'Einstein-Maxwell ou ceux de Kaluza-Klein dans la théorie d'Einstein-Maxwell ou bien les trous noirs extrémaux découlant naturellement dans la théorie des cordes hétérotiques compactifiée toroidalement. Un premier niveau de la géométrie thermodynamique nous permet d'envisager la construction d'une methode pour qu'on puisse voir comme l'interaction thermodynamique, la transition de phase et la branche d'ergonomie... etc. Pour voir clairement toutes ces idées, il faut envisager la métriques de Ruppenier de la même forme que nous avons donné avant:  $g_{ij} := -\partial_i \partial_j S(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J)$ .

## 7.1 Les trous noirs extrémaux de Kerr-Newman dans la théorie d'Einstein-Maxwell:

Considéons la thorie de la gravitation d'Einstein en quatre dimensions associée à un seul champ de Maxwell. Puis l'entropie de trous noirs extrémaux de Kerr-Newman est  $S_{BH} = \sqrt{J^2 + (\frac{q^2}{8\pi})^2}$  et la géométrie près de l'horizon de ces trous noirs est une géométrie de la gorge avec un analogue du vide d' $AdS_2 \times S^2$ . [86]. Ces trous noirs extrémaux de Kerr-Newman de la théorie d'Einstein-Maxwell ont la densité lagrangienne  $\mathcal{L} = R - \frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$  dont laquelle, on a cet entropie et cette géométrie près de l'horizon [14]. Avec cette entropie du trou noir, on peut voir ainsi que les composantes de la métrique de Ruppenier sont:

$$\begin{aligned} g_{qq} &= -\frac{J^2}{32\pi}(J^2 + (\frac{q}{8\pi})^2)^{-3/2}, \\ g_{qJ} &= \frac{qJ}{32\pi}(J^2 + (\frac{q}{8\pi})^2)^{-3/2} \text{ et} \\ g_{JJ} &= -\frac{q^2}{32\pi}(J^2 + (\frac{q}{8\pi})^2)^{-3/2}. \end{aligned}$$

Maintenant, il est facile d'observer que le déterminant de cette métrique de Ruppenier est zéro. C'est à dire que  $\|g_{ij}\| = S_{qq}S_{JJ} - S_{qJ}^2 = 0$ . Avec cette propriété de la métrique, pour toute géométrie thermodynamique bidimensionnelle, nous avons une observation suivante:

**L'observation:** Pour n'importe quelle métrique  $g_{ij}$  de Ruppenier définie par une fonction générale de profil comme  $f(x_1, x_2) = k\sqrt{x_1^2 - \alpha x_2^2}$ , on a simplement que le déterminant de la métrique est zéro. Donc, il est une corollaire simple que la variété de Ruppenier pour laquelle la norme du déterminant disparaite, la courbure thermodynamique est partout infinie dans l'espace d'états, parce que les variétés thermodynamiques bidimensionnelles ont une relation [46]:  $R = \frac{2}{\|g\|} R_{1212}$ .

## 7.2 Les trous noirs extrémaux de Kaluza-Klein dans la théorie d'Einstein-Maxwell:

Dans le cas de la rotation des trous noirs de Kaluza-Klein, examinons la théorie de la gravité qui est obtenue par la théorie de la réduction de la gravité pure des cinq dimensions sur un cercle. Les champs importants en quatre dimensions sont la métrique  $g_{\mu\nu}$  de l'espace-temps, un champ scalaire  $\phi$  associés à la rayon de la cinquième dimension et un champ de jauge  $A_\mu$  d' $U(1)$ . Il est bien connu que l'entropie associée à ce système de trous noirs est donnée par [14]:  $S(P, Q, J) = 2\pi\sqrt{P^2Q^2 - J^2}$ . En ce cas de l'entropie des trois paramètres, la métrique de Ruppenier, le déterminant de la métrique et la courbure scalaire de Ruppenier peuvent être écrits facilement et nous les avons donnés dans l'annexe [B]. Nous voyons maintenant que les composantes de la métrique de Ruppenier sont simplement données



par:

$$\begin{aligned}
g_{PP} &= \frac{2\pi P^2 Q^4}{(P^2 Q^2 - J^2)^{3/2}} - \frac{2\pi Q^2}{(P^2 Q^2 - J^2)^{1/2}}, \\
g_{PQ} &= \frac{2\pi P^3 Q^3}{(P^2 Q^2 - J^2)^{3/2}} - \frac{4\pi PQ}{(P^2 Q^2 - J^2)^{1/2}}, \\
g_{PJ} &= -\frac{2\pi J P Q^2}{(P^2 Q^2 - J^2)^{3/2}}, \\
g_{QQ} &= \frac{2\pi P^4 Q^2}{(P^2 Q^2 - J^2)^{3/2}} - \frac{2\pi P^2}{(P^2 Q^2 - J^2)^{1/2}}, \\
g_{QJ} &= -\frac{2\pi J P^2 Q}{(P^2 Q^2 - J^2)^{3/2}}, \\
g_{JJ} &= \frac{2\pi J^2}{(P^2 Q^2 - J^2)^{3/2}} + \frac{2\pi}{(P^2 Q^2 - J^2)^{1/2}},
\end{aligned}$$

Donc, il est précise que le déterminant du tenseur métrique est simplement,  $g = -8\pi^3 (PQ)^4 (P^2 Q^2 - J^2)^{-13/2} \{ (PQ)^8 - 4(PQ)^6 J^2 + 6(PQ)^4 J^4 - 4(PQ)^2 J^6 + J^8 \}$ . Ensuite, nous pouvons voir que la courbure scalaire de Ruppenier dans ces cas de trous noirs de Kaluza-Klein est,  $R = -(\frac{2P^4 Q^4 + P^2 Q^2 J^2 - 3J^4}{4\pi P^2 Q^2 (P^2 Q^2 - J^2)^{3/2}})$ . Nous voyons que  $g|_{J=0} = -\frac{8\pi^3}{PQ}$  et également  $R|_{J=0} = -\frac{1}{\pi|PQ|}$ . Donc, cette géométrie de Ruppenier est bien définie et ainsi une système statistique en interactions, qui reste la même au point  $J = 0$ . Il n'est pas difficile de voir que nous avons  $R = (\frac{2P^2 Q^2 + 3J^2}{4\pi P^2 Q^2 (P^2 Q^2 - J^2)^{1/2}})$ . Ensuite, on peut observer qu'il n'y a pas des divergences dans l'espace d'états et cette courbure de Ruppenier est partout régulière, sauf d'une branche d'ergo. Ceci est bien compatible avec le fait que l'espace de modules des trous noirs extrémaux en rotation sont constitués aux deux branches d'ergo, comme discuté pour la première fois dans [87]. En d'autres termes, le déterminant et la courbure scalaire de la géométrie de Ruppenier sont mal-définis sur la branche d'ergo et la courbure scalaire de Ruppenier devient nulle, si on traverse la frontière de l'autre succursale d'ergo.

### 7.3 Les trous noirs extrémaux de la théorie des cordes hétérotiques compactifiée toroidalement:

Dans cette sous-section, nous examinons les propriétés thermodynamiques des trous noirs extrémaux de la théorie de la gravitation en quatre dimensions couplée à un champ scalaire complexe  $S = S_1 + iS_2$ , quatre champs de jauge d' $U(1)$  donné par  $\{A_\mu^{(i)}\}_{i=1}^4$  et un champ scalaire  $M$  faire estimer dans la valeur de la matrice du type  $4 \times 4$  avec une contrainte:  $MLM^T = L$  où  $L = \begin{pmatrix} 0 & I_2 \\ I_2 & 0 \end{pmatrix}$  et la  $I_2$  denote la matrice d'identité de type  $2 \times 2$ , voir [14, 88] pour le détails des solutions de trous noirs en rotation avec une vecteur générale de charge électrique  $\vec{Q}$  et celle de la magnétique  $\vec{P}$ . De plus, il existe une famille de solutions avec les mêmes charges électriques et magnétiques, mais différentes valeurs asymptotiques des champs scalaires dans le cadre de la transformation d'une dualité d'électrique-magnétique. Ces solutions de trous noirs brisant la supersymétrie peuvent être construites en considérant les

$$\text{vecteurs de charges: } Q = \begin{pmatrix} 0 \\ Q_2 \\ 0 \\ Q_4 \end{pmatrix} \text{ et } P = \begin{pmatrix} P_1 \\ 0 \\ P_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Pour cette classe de solutions, la masse  $M$  d'ADM, les charges électriques, magnétiques  $\{Q_i, P_i\}$  et le moment cinétique  $J$ , l'entropie de trou noir associé peut être trouvée en général dans les articles [13, 87]. Il s'avère que cette solution a deux types différents de la limite extrémale connue sous le nom de la succursale

de l'ergo et la succursale sans d'ergo. Dans la limite extrême correspondante à la succursale de l'ergo, l'entropie de ces trous noirs en rotation est donnée par [14]  $S(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J) := 2\pi\sqrt{J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4}$ . En outre, nous pouvons voir que la valeur absolue de cet entropie reste la même dans la succursale de l'ergo ainsi que dehors de la succursale d'ergo.

Selon ce cas d'application, nous avons la même forme de la métrique de Ruppenier  $g_{ij}(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J)$  que nous avons donnée avant avec l'élément de la ligne de Ruppenier comme:

$$\begin{aligned} ds^2 := & -\left(\frac{\partial^2 S(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J)}{\partial P_1^2}\right)dP_1^2 - 2\left(\frac{\partial^2 S(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J)}{\partial Q_2 \partial P_1}\right)dP_1 dQ_2 - 2\left(\frac{\partial^2 S(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J)}{\partial P_1 \partial P_3}\right)dP_1 dP_3 - \\ & 2\left(\frac{\partial^2 S(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J)}{\partial P_1 \partial Q_4}\right)dP_1 dQ_4 - 2\left(\frac{\partial^2 S(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J)}{\partial P_1 \partial J}\right)dP_1 dJ - \left(\frac{\partial^2 S(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J)}{\partial Q_2^2}\right)dQ_2^2 - \\ & 2\left(\frac{\partial^2 S(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J)}{\partial Q_2 \partial P_3}\right)dQ_2 dP_3 - 2\left(\frac{\partial^2 S(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J)}{\partial Q_2 \partial Q_4}\right)dQ_2 dQ_4 - 2\left(\frac{\partial^2 S(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J)}{\partial Q_2 \partial J}\right)dQ_2 dJ - \\ & \left(\frac{\partial^2 S(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J)}{\partial P_3^2}\right)dP_3^2 - 2\left(\frac{\partial^2 S(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J)}{\partial Q_4 \partial P_3}\right)dQ_4 dP_3 - 2\left(\frac{\partial^2 S(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J)}{\partial P_3 \partial J}\right)dP_3 dJ - \\ & \left(\frac{\partial^2 S(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J)}{\partial Q_4^2}\right)dQ_4^2 - 2\left(\frac{\partial^2 S(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J)}{\partial Q_4 \partial J}\right)dQ_4 dJ - \left(\frac{\partial^2 S(P_1, Q_2, P_3, Q_4, J)}{\partial J^2}\right)dJ^2. \end{aligned}$$

Dans ce cas, les formules du déterminant et de la courbure scalaire de Ruppenier sont grandes. Mais, pour le cas particulier de cet entropie d'un trou noir extremal découlant de la théorie des cordes hétérotiques compactifiée toroidalement, il est immédiat d'obtenir que les composantes de la métrique sont données à:

$$\begin{aligned} g_{P_1 P_1} &= \frac{\pi(Q_2 P_3 Q_4)^2}{2(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{3/2}} \\ g_{P_1 Q_2} &= \frac{\pi P_1 Q_2 P_3 Q_4^2}{2(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{3/2}} - \frac{\pi P_3 Q_4}{(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{1/2}} \\ g_{P_1 P_3} &= \frac{\pi P_1 Q_2^2 P_3 Q_4^2}{2(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{3/2}} - \frac{\pi Q_2 Q_4}{(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{1/2}} \\ g_{P_1 Q_4} &= \frac{\pi P_1 Q_2^2 P_3 Q_4}{2(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{3/2}} - \frac{\pi Q_2 P_3}{(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{1/2}} \\ g_{P_1 J} &= \frac{\pi J Q_2 P_3 Q_4}{(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{3/2}} \\ g_{Q_2 Q_2} &= \frac{\pi(P_1 P_3 Q_4)^2}{2(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{3/2}} \\ g_{Q_2 P_3} &= \frac{\pi P_1^2 Q_2 P_3 Q_4^2}{2(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{3/2}} - \frac{\pi P_1 Q_4}{(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{1/2}} \\ g_{Q_2 Q_4} &= \frac{\pi P_1^2 Q_2 P_3^2 Q_4}{2(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{3/2}} - \frac{\pi P_1 P_3}{(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{1/2}} \\ g_{Q_2 J} &= \frac{\pi J P_1 P_3 Q_4}{(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{3/2}} \\ g_{P_3 P_3} &= \frac{\pi(P_1 Q_2 Q_4)^2}{2(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{3/2}} \\ g_{P_3 Q_4} &= \frac{\pi P_1^2 Q_2^2 P_3 Q_4}{2(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{3/2}} - \frac{\pi P_1 Q_2}{(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{1/2}} \\ g_{P_3 J} &= \frac{\pi J P_1 Q_2 Q_4}{(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{3/2}} \\ g_{Q_4 Q_4} &= \frac{\pi(P_1 Q_2 P_3)^2}{2(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{3/2}} \\ Q_4 J &= \frac{\pi J P_1 Q_2 P_3}{(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{3/2}} \\ g_{J J} &= \frac{2\pi J^2}{(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{3/2}} - \frac{2\pi}{(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{1/2}}. \end{aligned}$$

Nous voyons donc que le déterminant de cette métrique de Ruppenier est,  $g = 2\pi^5(P_1 Q_2 P_3 Q_4)^3(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{-15/2}(J^8 + 4J^6 P_1 Q_2 P_3 Q_4 + 6J^4(P_1 Q_2 P_3 Q_4)^2 + 4J^2(P_1 Q_2 P_3 Q_4)^3 + (P_1 Q_2 P_3 Q_4)^4)$ . Il est également facile de voir que dans ce cas des trous noirs de la théorie des cordes heterotic compactifiée toroidalement, la courbure scalaire de Ruppenier est,  $R = \frac{1}{2\pi P_1 Q_2 P_3 Q_4}\{J^6 + 3J^4(P_1 Q_2 P_3 Q_4) + 3J^2(P_1 Q_2 P_3 Q_4)^2 + (P_1 Q_2 P_3 Q_4)^3\}^{-1}(9J^2 + 2P_1 Q_2 P_3 Q_4)(J^2 + P_1 Q_2 P_3 Q_4)^{5/2}$ .

On peut observer simplement que cette courbure scalaire de Ruppenier est non nulle pour toutes les valeurs physiquement autorisées des charges électriques, magnétiques et de moment cinétique. Donc, la variété d'états est partout régulière,

sauf la branche d'ergo. Ceci est bien compatible avec le fait que l'espace de modules des trous noirs extrémaux en rotation est constitué des deux succursales, ce qu'on peut aussi voir facilement aux racines réelles du dénominateur de cette courbure scalaire de Ruppenier. En ce cas aussi sans la rotation, nous voyons que  $g|_{J=0} = \frac{2\pi^5}{\sqrt{P_1 Q_2 P_3 Q_4}}$  et la courbure scalaire est  $R|_{J=0} = \frac{1}{\pi \sqrt{P_1 Q_2 P_3 Q_4}}$ . Ainsi, cette géométrie de Ruppenier est bien définie et un système statistique en interactions, ceci reste les mêmes au point de  $J = 0$ . En outre, pour le cas de  $Q_2 = Q_4$  et  $P_1 = P_3$  nous pouvons voir que la valeur absolue du déterminant et celle de la courbure scalaire de Ruppenier deviennent les mêmes que le déterminant et la courbure scalaire de Ruppenier des trous noirs de Kaluza-Klein de la sous-section précédente. En bref, nous avons montré que la géométrie thermodynamique des trous noirs extrémaux en rotation en quatre dimensions de la théorie des cordes ou celui de Kaluza-Klein a certaines instabilités aux points de la branche d'ergo et celle de Kerr-Newman dans la théorie d'Einstein Maxwell, sinon elles sont partout bien-définies.

## 8 Remarques et conclusions:

Dans cet article, nous avons étudié la géométrie thermodynamique de l'espace des états thermodynamiques pour une classe générale de trous noirs avec les corrections d' $\alpha'$  ou bien avec le principe d'incertitude généralisée. Nous avons établi que les inclusions des corrections d' $\alpha'$  et du  $l_p$  modifient les concepts géométriques thermodynamiques habituels et chacune induit généralement une courbure scalaire différente dans la géométrie de Ruppenier où celle de Wienhold. Nous avons analysé les corrections d' $\alpha'$  de la géométrie de Ruppenier d'une classe de trous noirs, qui sont bien intégrées dans certains cas intéressants de l'entropie des trous noirs. Cela nous motive à étudier la géométrie de Ruppenier associée à l'entropie de ces trous noirs. D'autre part, comme dans la perspective du mécanisme d'attracteur, la géométrie de Wienhold est proportionnelle à la géométrie de l'espace des modules aux points fixes de l'attracteur, laquelle nous avons analysé pour le cas de trous noirs dilatoniques topologiques. À ce stade, nous avons constaté que la géométrie de Wienhold associée à la masse du trou noir est bien définie et n'a pas de courbure de Wienhold nulle. Dans certains cas, les courbures de la thermodynamique sont partout régulières dans l'espace d'état, afin qu'il n'y ait pas d'instabilités thermodynamiques dans l'espace de l'état du trou noir considéré. Nous avons montré que la géométrie thermodynamique du trou noir de Reissner-Nordström dans l' $AdS_4$  a des singularités qui peuvent correspondre aux instabilités tachyoniques et sont bien connues dans la théorie de jauge supersymétrique. Nos conclusions de l'étude de la géométrie de Wienhold sont donc clarifiantes, compatibles avec l'existence de certaines instabilités dans la variété de sous-espace d'état.

Nous avons constaté que les géométries de Ruppenier d'une classe de trous noirs extrémaux sont en général partout réguliers, exceptés les cas où il y a quelques instabilités dans la variété de l'espace d'état ainsi que les cas où l'entropie des trous noirs considérés ont besoin de plus de contributions d' $\alpha'$ . Ces résultats sont vérifiés pour l'entropie des trous noirs supersymétriques avec les corrections de Gauss-Bonnet et aussi pour les divers ordres des corrections d' $\alpha'$  à l'entropie des trous noirs non-supersymétriques. Nous avons montré qu'il existe d'autres exemples comme les trous noirs de Kaluza-Klein en rotation, les trous noirs découlant des théories des cordes hétérotiques compactifiées toroidalement,... etc, qui ont des divergences dans leur courbure de Ruppenier. Ces divergences dans les courbures de Ruppenier sont en bon accord avec la présence de branche de l'ergo dans les théories des trous noirs en rotation. Les résultats de l'étude géométrique thermodynamique des branes noirs non-extremal des  $D_1 D_5 p$  et  $D_2 D_6 N S_5 p$  sont très intéressants. Ici, nous découvrons que les géométries thermodynamiques de Ruppenier associées aux variétés d'espace

de l'état des branes noirs non extremals des  $D_1D_5p$  et  $D_2D_6NS_5p$  sont bien définies et partout régulières.

Cependant, nous avons également montré que le trou noir de Reissner-Nordström n'est pas en interaction. Ainsi, le plaisir du jeu géométrique est intact, et nous voyons que la conclusion reste la même bien qu'on ajoute les contributions du principe d'incertitude généralisée à l'entropie du trou noir de Reissner-Nordström. De plus, à partir de la théorie des cordes, nous voyons dans certaines circonstances que les corrections d' $\alpha'$  des dérivées supérieures à l'entropie des trous noirs ont modifié la géométrie thermodynamique de manière bien attendue. Par exemple, la géométrie de Ruppenier à l'entropie des trous noirs non-supersymétriques extremals avec les corrections des dérivés supérieures est bien définie et courbée. En fait, dans ce cas, nous avons observé une évolution de la courbure de Ruppenier avec l'ajout des corrections des dérivés supérieures à l'entropie de ce trou noir. Par conséquent, nous avons donné une méthode pour déterminer le degré du déterminant de la métrique tenseur, et ensuite, nous pouvons facilement déterminer le degré de l'autre facteur apparaissant dans la courbure de Ruppenier à l'ordre arbitraire  $l$  des corrections d' $\alpha'$ . Cette observation du degré de la géométrie de Ruppenier est la mesure du formulaire pour toutes les sous-contributions à l'entropie du trou noir non-supersymétrique extrémal. C'est-à-dire que cet observation reste vraie  $\forall l > 1$ .

De plus, nous avons donné une reformulation du problème en termes d'énergie libre topologique du trou noir ainsi que de la fonction de partition de trou noir qui indique dans le cas des petits trous noirs que l'ensemble doit être un ensemble mélangé. La géométrie de Ruppenier est peut être l'un des concepts les plus importants pour comprendre les fonctions de corrélations de la théorie des champs conformes à la frontière. De toute manière, la courbure scalaire de Ruppenier est liée aux fonctions de corrélations des deux points de la théorie des champs conformes à la frontière. Dans cet article, nous avons considéré certains cas stables intéressants des trous noirs. Ensuite, nous avons vu que la géométrie de Ruppenier est bien définie et partout régulière, avec ou sans les corrections d' $\alpha'$  des dérivées supérieures. Par exemple, c'est le cas des trous noirs extrémaux supersymétriques de BPS en  $D = 4$  ou celui des non-supersymétriques ou les branes noirs  $D_1D_5$  et  $D_2D_6NS_5$  en  $D = 10$  non-extrémaux. En effet, ces géométries de l'espace d'état sont partout régulières. Cela est parfaitement en accord avec un autre fait que ces trous noirs ou branes noirs de BPS sont stables, et restent les mêmes objets avec les corrections d' $\alpha'$  des dérivés supérieures. En revanche, la géométrie de Ruppenier des trous noirs en rotation en  $D = 4$  diverge aux points de la branche d'ergo. Donc, il devrait exister des fonctions de corrélations divergentes des deux points de la théorie des champs conformes à la frontière correspondante à ces systèmes de trous noirs en rotation.

Du point de vue de la géométrie de Weinhold qui est directement associée à la géométrie de l'espace des modules, on peut essayer de comprendre l'origine microscopique des singularités tachyoniques des trous noirs de Reissner-Nordström dans l' $AdS_4$  en découlant de la considération d'un grand nombre de  $M_2$ -branes coïncidentes. Autrement dit, l'étude de la géométrie thermodynamique covariante peut éclairer sur la nature des fonctions de corrélations des deux points de la théorie des champs conformes de la frontière correspondante. De cette manière, on peut comprendre du point de vue de la théorie des champs conformes que le système thermique sous-jacent est stable ou instable. Par conséquence, nous pouvons comprendre l'origine microscopique des singularités thermodynamiques de certaines paires d'anti-branes et branes de la théorie des champs conformes. En particulier, le cas des trous noirs non-BPS découlant de la théorie des cordes peuvent être étudiés des points de vue de la géométrie thermodynamique, et les interactions thermodynamiques apparaissent en présence des deux modes gauche et droite, de la duale théorie des champs conformes. En bref, notre étude géométrique peut prévoir la

nature des interactions présente dans la duale théorie des champs conformes de certains trous noirs ou branes noirs extremals ainsi que ceux de non-extremals, découlant de la théorie des cordes ou bien de la M-théorie.

Finalement, il est également intéressant de généraliser ces études aux théories des dérivées supérieures arbitraires pour les systèmes de trous noirs. Nous aimerions étudier les propriétés géométriques thermodynamiques pour les solutions de certains branes, comme dans la théorie des cordes ou bien dans la M- théorie, dans les diverses dimensions de l'espace-temps  $D \geq 4$  et celles corrigées par les dérivées supérieures d' $\alpha'$ . En outre, il est intéressant d'enquêter sur la géométrie thermodynamique loins des points fixes de l'attracteur et aussi sur certaines extensions de l'inclusion des situations de non-équilibre. Dans les cas spécifiques, nous devrions aussi enquêter pour les suites de la géométrie thermodynamique loin des points fixes de l'attracteur. Nous avons l'intention d'aborder ces questions dans une prochaine publication [89]. Dans un proche avenir, nous sommes également intéressés à étudier certaines propriétés géométriques et algébriques de ces systèmes de trous noirs dans la théorie des supercordes ainsi que dans la M-théorie.

## 9 Remerciements:

Je remercie le professeur Ashoke Sen pour les discussions utiles sur la fonction de l'entropie et l'entropie des trous noirs au cours de  $\langle\langle$  String School- 2006  $\rangle\rangle$  à l' $\langle\langle$  Institute of Physics, Bhubaneswar, India  $\rangle\rangle$  et les issues de l'AdS/CFT lors de sa visite à l' $\langle\langle$  IIT-Kanpur-2008  $\rangle\rangle$ . Je suis reconnaissant au professeur Jean de Boer pour les discussions de l'AdS/CFT et pour les calculs de l'entropie microscopique de certains branes noirs en  $\langle\langle$  String School- 2006  $\rangle\rangle$  à l' $\langle\langle$  Institute of Physics, Bhubaneswar, India  $\rangle\rangle$  et à l' $\langle\langle$  ICTP Spring String School-2007  $\rangle\rangle$  au ICTP, Italie. Je souhaite remercier Yogesh K. Srivastava pour les intéressantes discussions sur l'entropie microscopique de trous noirs et branes noirs au cours du  $\langle\langle$  Indian String Meeting-2007, Harish-Chandra Research Institute, Allahabad, India  $\rangle\rangle$ . Je voudrais remercier professeur Amandine Almarche, Vincent Régnier, Vinod Chandra, professeur Shubha Karnick et Arjun Basu pour l'aide qu'ils m'ont apportée durant la préparation de ce travail. Je remercie également le  $\langle\langle$  CSIR- New Delhi, India  $\rangle\rangle$  pour la bourse de recherche au titre des subventions:  $\langle\langle$  CSIR-SRF-9/92(343)/2004-EMR-I  $\rangle\rangle$ .

### L'annexe A: La géométrie thermodynamique de Ruppenier pour les trous noirs avec deux paramètres:

Dans cet appendice, nous allons donner les formules pour un système thermodynamique des trous noirs de deux paramètres. Nous pouvons paramétriser l'entropie par sa masse  $M$  et la charge  $Q$  par  $S(M, Q)$ . Et alors, la métrique de Ruppenier est généralement donnée par,  $ds^2 = -\frac{\partial^2 S(M, Q)}{\partial M^2} dM^2 - 2\frac{\partial^2 S(M, Q)}{\partial M \partial Q} dM dQ - \frac{\partial^2 S(M, Q)}{\partial Q^2} dQ^2$ . Nous voyons que le déterminant du tenseur métrique est  $\|g\| = \frac{\partial^2 S(M, Q)}{\partial M^2} \frac{\partial^2 S(M, Q)}{\partial Q^2} - (\frac{\partial^2 S(M, Q)}{\partial M \partial Q})^2$ . Aussi, il est très facile de voir que la courbure scalaire de Ruppenier est simplement  $R = \frac{1}{2} \{ \frac{\partial^2 S(M, Q)}{\partial M^2} \frac{\partial^2 S(M, Q)}{\partial Q^2} - (\frac{\partial^2 S(M, Q)}{\partial M \partial Q})^2 \}^{-2} [ -\frac{\partial^2 S(M, Q)}{\partial Q \partial M} \frac{\partial^3 S(M, Q)}{\partial M^3} \frac{\partial^3 S(M, Q)}{\partial Q^3} + \frac{\partial^3 S(M, Q)}{\partial Q^2 \partial M} \frac{\partial^3 S(M, Q)}{\partial M^3} \frac{\partial^2 S(M, Q)}{\partial Q^2} - \frac{\partial^2 S(M, Q)}{\partial M^2} (\frac{\partial^3 S(M, Q)}{\partial Q^2 \partial M})^2 + \frac{\partial^2 S(M, Q)}{\partial M^2} \frac{\partial^3 S(M, Q)}{\partial Q \partial M^2} \frac{\partial^3 S(M, Q)}{\partial Q^3} + \frac{\partial^3 S(M, Q)}{\partial Q \partial M^2} \frac{\partial^2 S(M, Q)}{\partial M \partial Q} \frac{\partial^3 S(M, Q)}{\partial Q^2 \partial M} - (\frac{\partial^3 S(M, Q)}{\partial Q \partial M^2})^2 \frac{\partial^2 S(M, Q)}{\partial Q^2} ]$ .

### L'annexe B: La géométrie thermodynamique de Ruppenier pour les trous noirs avec trois paramètres:

Dans cet appendice, examinons généralement le cas des trous noirs avec trois paramètres, comme les trous noirs en rotations [14]. Ici, nous voyons que la géométrie



$$\begin{aligned}
& 2 \frac{\partial^3 S}{\partial Q^2 \partial P} \frac{\partial^3 S}{\partial P \partial J^2} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial P} \right)^2 \frac{\partial^2 S}{\partial J^2} - 2 \frac{\partial^3 S}{\partial Q \partial P^2} \frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial J} \frac{\partial^3 S}{\partial J^3} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial P} \right)^2 - \frac{\partial^3 S}{\partial P^2 \partial J} \frac{\partial^2 S}{\partial Q^2} \frac{\partial^3 S}{\partial J^3} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial P} \right)^2 + \left( \frac{\partial^2 S}{\partial P^2} \right)^2 \frac{\partial^3 S}{\partial Q^2 \partial J} \frac{\partial^3 S}{\partial Q \partial J^2} \frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial J} + \\
& \left( \frac{\partial^2 S}{\partial P^2} \right)^2 \frac{\partial^3 S}{\partial Q^3} \frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial J^2} \frac{\partial^2 S}{\partial J^2} - \left( \frac{\partial^2 S}{\partial P^2} \right)^2 \frac{\partial^3 S}{\partial Q^3} \frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial J} \frac{\partial^3 S}{\partial J^3} + \left( \frac{\partial^2 S}{\partial P^2} \right)^2 \frac{\partial^2 S}{\partial Q^2} \frac{\partial^3 S}{\partial Q^2 \partial J} \frac{\partial^3 S}{\partial J^3} - \frac{\partial^2 S}{\partial P^2} \frac{\partial^3 S}{\partial Q^2 \partial J} \frac{\partial^3 S}{\partial J^3} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial P} \right)^2 - \\
& \frac{\partial^2 S}{\partial P^2} \frac{\partial^3 S}{\partial Q^3} \frac{\partial^3 S}{\partial Q \partial J^2} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial J} \right)^2 - 3 \frac{\partial^2 S}{\partial P^2} \frac{\partial^3 S}{\partial Q^2 \partial P} \frac{\partial^3 S}{\partial P \partial J^2} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial J} \right)^2 + \frac{\partial^2 S}{\partial P^2} \frac{\partial^3 S}{\partial P^2 \partial J} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial Q^2} \right)^2 \frac{\partial^3 S}{\partial J^3} + 2 \frac{\partial^2 S}{\partial P^2} \frac{\partial^3 S}{\partial P^2 \partial J} \frac{\partial^3 S}{\partial Q^2 \partial J} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial J} \right)^2 + \\
& 2 \frac{\partial^2 S}{\partial P^2} \frac{\partial^3 S}{\partial Q \partial P^2} \frac{\partial^3 S}{\partial Q \partial J^2} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial Q \partial J} \right)^2 + \frac{\partial^2 S}{\partial P^2} \frac{\partial^3 S}{\partial Q \partial P^2} \left( \frac{\partial^2 S}{\partial J^2} \right)^2 \frac{\partial^3 S}{\partial Q^3} - 3 \frac{\partial^2 S}{\partial P^2} \left( \frac{\partial^3 S}{\partial Q \partial P \partial J} \right)^2 \frac{\partial^2 S}{\partial Q^2} \frac{\partial^2 S}{\partial J^2} - 2 \frac{\partial^2 S}{\partial P^2} \frac{\partial^3 S}{\partial Q \partial P \partial J} \frac{\partial^2 S}{\partial P \partial J} \frac{\partial^3 S}{\partial Q^3} \frac{\partial^2 S}{\partial J^2} ].
\end{aligned}$$

### L'annexe C: La géométrie thermodynamique de Ruppenier des trous noirs dyoniques extrémaux non-supersymétriques:

En fin, dans cet appendice, nous terminons en donnant seulement les coefficients du déterminant de la métrique de Ruppenier et celles de la numérateur et dénominateur de la courbure scalaire de Ruppenier pour les trous noirs dyoniques extrémaux non-supersymétriques en quatre dimensions avec quatre paramètres. Ces résultats sont donnés ci-dessous:

(i) L'entropie de trou noir dyonique non-supersymétrique extrémal est modifiée par les corrections d' $\alpha'$  à [11]:  $S_{BH}^{ns} = 2\pi\sqrt{nwNW} + \frac{5\hat{\alpha}}{4}\sqrt{\frac{nw}{NW}} - \frac{29\pi\hat{\alpha}^2}{64}\frac{\sqrt{nw}}{(NW)^{3/2}}$ . Les coefficients du déterminant de la métrique de Ruppenier sont:  $a_0^{(2)} = 268435465$ ,  $a_1^{(2)} = 335544320$ ,  $a_2^{(2)} = 486539264$ ,  $a_3^{(2)} = 96993280$ ,  $a_4^{(2)} = 78020608$ ,  $a_5^{(2)} = 303493120$ ,  $a_6^{(2)} = 193766400$ ,  $a_7^{(2)} = 105360480$ ,  $a_8^{(2)} = 19096587$ . Et les coefficients de la numérateur de la courbure scalaire de Ruppenier sont données par:  $b_0^{(2)} := 151115727451828646838272$ ,  $b_1^{(2)} := 566683977944357425643520$ ,  $b_2^{(2)} := 1554839164484830686609408$ ,  $b_3^{(2)} := 2691748895235697771806720$ ,  $b_4^{(2)} := 3644680023967422643961856$ ,  $b_5^{(2)} := 3238521918795494950174720$ ,  $b_6^{(2)} := 1636571571386261016937348$ ,  $b_7^{(2)} := 1035072750709696595230720$ ,  $b_8^{(2)} := 3114495211372010736189440$ ,  $b_9^{(2)} := 4045312154131246560051200$ ,  $b_{10}^{(2)} := 3284271220150290939379712$ ,  $b_{11}^{(2)} := 1744948376062537655989760$ ,  $b_{12}^{(2)} := 207642369296456823078912$ ,  $b_{13}^{(2)} := 692817104454622568775680$ ,  $b_{14}^{(2)} := 955612819719829254569984$ ,  $b_{15}^{(2)} := 767575904726157235322880$ ,  $b_{16}^{(2)} := 471544676657505597652992$ ,  $b_{17}^{(2)} := 226753453528839573995520$ ,  $b_{18}^{(2)} := 88474584103006770708480$ ,  $b_{19}^{(2)} := 27086263837548753715200$ ,  $b_{20}^{(2)} := 6342041422831849879680$ ,  $b_{21}^{(2)} := 1030497125534844337440$ ,  $b_{22}^{(2)} := 80047544572795944069$ .

(ii) Pour le cas d'un trou noir dyonique non-supersymétrique extrémal, l'entropie est modifiée par les corrections d' $\alpha'$  à [11]:  $S_{BH}^{ns} = 2\pi\sqrt{nwNW} + \frac{5\hat{\alpha}}{4}\sqrt{\frac{nw}{NW}} - \frac{29\pi\hat{\alpha}^2}{64}\frac{\sqrt{nw}}{(NW)^{3/2}} - \frac{119\pi\hat{\alpha}^3}{512}\frac{\sqrt{nw}}{(NW)^{5/2}}$ . Avec cet entropie de trou noir, les coefficients du déterminant de la métrique de Ruppenier sont données par:

$a_0^{(3)} = 1099511627776$ ,  $a_1^{(3)} = 1374389534720$ ,  $a_2^{(3)} = 1992864825344$ ,  $a_3^{(3)} = 1391569403904$ ,  $a_4^{(3)} = 1278886984288$ ,  $a_5^{(3)} = 2255327592548$ ,  $a_6^{(3)} = 1464860672000$ ,  $a_7^{(3)} = 461107888128$ ,  $a_8^{(3)} = 634608734208$ ,  $a_9^{(3)} = 665576375296$ ,  $a_{10}^{(3)} = 58692247040$ ,  $a_{11}^{(3)} = 136834910800$ ,  $a_{12}^{(3)} = 25066740125$ . Bien aussi, il n'est pas difficile de voir que les coefficients de la numérateur de la courbure scalaire de Ruppenier sont données par:  $b_0^{(3)} := 649037107316853453566312041152512$ ,  $b_1^{(3)} := 2433889152438200450873670154321920$ ,  $b_2^{(3)} := 6677983362002312487084722485920768$ ,  $b_3^{(3)} := 8543965045538266166087779604234240$ ,  $b_4^{(3)} := 6319911781519094813330610602477216$ ,  $b_5^{(3)} := 8708789334128878837408948599914496$ ,

$$\begin{aligned}
b_6^{(3)} &:= 18230100923527726839673006109032348, \\
b_7^{(3)} &:= 22809819400585199659705778867011584, \\
b_8^{(3)} &:= 2746351837763049207854079383339008, \\
b_9^{(3)} &:= 16937512378050136058388695759192064, \\
b_{10}^{(3)} &:= 30517688854243991263286936364646400, \\
b_{11}^{(3)} &:= 2508737031650084816936415262670848, \\
b_{12}^{(3)} &:= 9629297583980539505359169477748496, \\
b_{13}^{(3)} &:= 25211656500328085471145776853811200, \\
b_{14}^{(3)} &:= 5407819854530319998576788728971264, \\
b_{15}^{(3)} &:= 3749882437884342477964040659271680, \\
b_{16}^{(3)} &:= 13851750383627352823985220593123328, \\
b_{17}^{(3)} &:= 5766328052238059630405461534048256, \\
b_{18}^{(3)} &:= 1038344759870860112999123740786688, \\
b_{19}^{(3)} &:= 4661048705501894434971872635387904, \\
b_{20}^{(3)} &:= 2961846280760197698290172148318208, \\
b_{21}^{(3)} &:= 262052090914124663980773435506688, \\
b_{22}^{(3)} &:= 532141532156927676742073219022848, \\
b_{23}^{(3)} &:= 653026803815080556684824460831680, \\
b_{24}^{(3)} &:= 90468645291400164777502546815360, \\
b_{25}^{(3)} &:= 134002466479224335657801326002176, \\
b_{26}^{(3)} &:= 9021455727154467926565390909440, \\
b_{27}^{(3)} &:= 4020769267782650664879066147200, \\
b_{28}^{(3)} &:= 31430414379123419878684254208000, \\
b_{29}^{(3)} &:= 8200267068308569622317875200000, \\
b_{30}^{(3)} &:= 2847141179673614813181320800000, \\
b_{31}^{(3)} &:= 1910264928325154051312578000000, \\
b_{32}^{(3)} &:= 376738924490002189299286562500, \\
b_{33}^{(3)} &:= 26471381680627221066140234375.
\end{aligned}$$

(iii) Pour le cas de ces trous noirs dyoniques non-supersymétriques, la prochaine correction d' $\alpha'$  donne que l'entropie est modifié à [11]:  $S_{BH}^{ns} = 2\pi\sqrt{nwNW} + \frac{5\hat{\alpha}}{4}\sqrt{\frac{nw}{NW}} - \frac{29\pi\hat{\alpha}^2}{64}\frac{\sqrt{nw}}{(NW)^{3/2}} - \frac{119\pi\hat{\alpha}^3}{512}\frac{\sqrt{nw}}{(NW)^{5/2}} - \frac{2237\pi\hat{\alpha}^4}{16384}\frac{\sqrt{nw}}{(NW)^{7/2}}$ . Cette fois, on voit que les coefficients du déterminant de la métrique de Ruppenier sont données par:

$$\begin{aligned}
a_0^{(4)} &= 1152921504606846976, a_1^{(4)} = 1441151880758558720, \\
a_2^{(4)} &= 2089670227099910144, a_3^{(4)} = 979532918953082880, \\
a_4^{(4)} &= 234187180623265792, a_5^{(4)} = 1479423681498185728, \\
a_6^{(4)} &= 2510022318491697152, a_7^{(4)} = 2199463953556307968, \\
a_8^{(4)} &= 812853409370603220, a_9^{(4)} = 1246334434907521024, \\
a_{10}^{(4)} &= 1215464551613464576, a_{11}^{(4)} = 726005331231698944, \\
a_{12}^{(4)} &= 034314950444056576, a_{13}^{(4)} = 2215248589143760896, \\
a_{14}^{(4)} &= 156587249836638208, a_{15}^{(4)} = 45952977111390272, \\
a_{16}^{(4)} &= 8589305631532423. \text{ Et à la fin, les coefficients de la numérateur de la courbure} \\
&\text{scalaire de Ruppenier sont données par:} \\
b_0^{(4)} &:= 46768052394588893382517914646921056628989841375232, \\
b_1^{(4)} &:= 175380196479708350184442179925953962358711905157120, \\
b_2^{(4)} &:= 481199414091199785818563231171836184221715789774848,
\end{aligned}$$



$b_3^{(4)} := 615657564625642854293302235781734222030061583728640,$   
 $b_4^{(4)} := 637384656351705681562652523094663886491216165585792,$   
 $b_5^{(4)} := 060820733176971774471417808302120785742814365635136,$   
 $b_6^{(4)} := 0077048952208353002394255318308460838088289093156864,$   
 $b_7^{(4)} := 0443744186342635078455885344779150492330265629091840,$   
 $b_8^{(4)} := 0864040385201805067882130888101945037607762200100864,$   
 $b_9^{(4)} := 0855743962072769399183762667350572626065261582090240,$   
 $b_{10}^{(4)} := 0802529236762125001988159352915846580454829854818304,$   
 $b_{11}^{(4)} := 2026775198773356990263556464280348396045520781443072,$   
 $b_{12}^{(4)} := 2096731906862568699651717922259444429118837182431232,$   
 $b_{13}^{(4)} := 2324109887273868838712894878693476608217546091397120,$   
 $b_{14}^{(4)} := 2797777769811171064406130693911625639461518546305024,$   
 $b_{15}^{(4)} := 3622307603470438724188590741401428018893705942401024,$   
 $b_{16}^{(4)} := 3665698356418889118579219304523819611771281577345024,$   
 $b_{17}^{(4)} := 3624389311532945863716153745037071794279169208090624,$   
 $b_{18}^{(4)} := 3831621642269134782872780673110822294119917620822016,$   
 $b_{19}^{(4)} := 3843012033931158955192963205078391212165860968890368,$   
 $b_{20}^{(4)} := 3450888575537611067717273382630071777087873706098688,$   
 $b_{21}^{(4)} := 2920094688950407202576681898568787360082046012620800,$   
 $b_{22}^{(4)} := 2530314181244638688443185152839855368523618610839552,$   
 $b_{23}^{(4)} := 2060262521862868209174087375508534964309286591659032,$   
 $b_{24}^{(4)} := 1506502362206011452182123478366304057101956790878208,$   
 $b_{25}^{(4)} := 984072537550755464015334416868308706081412342611968,$   
 $b_{26}^{(4)} := 621765478312283229911533088828495492879078783975424,$   
 $b_{27}^{(4)} := 352083963380280094062497709887336317749357668197376,$   
 $b_{28}^{(4)} := 146330752373459779698349421015666003863563290017792,$   
 $b_{29}^{(4)} := 09128172259270687221507807655448399941011853279232,$   
 $b_{30}^{(4)} := 48023312244500156708180631382366007707750545489920,$   
 $b_{31}^{(4)} := 56370382548564130581981727328424516260004003577856,$   
 $b_{32}^{(4)} := 46355823168213271740530182249587875436148218134520,$   
 $b_{33}^{(4)} := 33083206640482065324748063883196832504443664596992,$   
 $b_{34}^{(4)} := 19321780018124819160678130801246451249327542108160,$   
 $b_{35}^{(4)} := 7920138128575941265649284673523148226080591052800,$   
 $b_{36}^{(4)} := 1082302697430499687284237313025913398838727540736,$   
 $b_{37}^{(4)} := 1318770984813484642751201210488106765919135465472,$   
 $b_{38}^{(4)} := 1314807040648907849090453195327342265965047971840,$   
 $b_{39}^{(4)} := 699936020368298093598774337935303126571573837824,$   
 $b_{40}^{(4)} := 259442774629683397001379161614980699008334987264,$   
 $b_{41}^{(4)} := 69842592165759724840743271178491287103706505216,$   
 $b_{42}^{(4)} := 13528781821295168537413764813477641410656245504,$   
 $b_{43}^{(4)} := 1732031270443498437016143778215638456349779456,$   
 $b_{44}^{(4)} := 121403553809599745266704345918335871496525839.$

## References

- [1] Ashoke Sen: Black Hole Entropy Function and the Attractor Mechanism in Higher Derivative Gravity; JHEP 0509 (2005) 038, [hep-th/0506177](#).
- [2] J. Maldacena: The Large N Limit of Superconformal Field Theories and Supergravity; Adv. Theor. Math. Phys. 2, 231 (1998), [hep-th/9711200](#).
- [3] Sergio Ferrara, Renata Kallosh, Andrew Strominger: N=2 Extremal Black Holes; Phys.Rev. D52 (1995) 5412-5416, [hep-th/9508072](#).
- [4] Andrew Strominger: Macroscopic Entropy of  $N = 2$  Extremal Black Holes; Phys.Lett. B383 (1996) 39-43, [hep-th/9602111](#).
- [5] Juan Maldacena, Andrew Strominger, Edward Witten: Black Hole Entropy in M-Theory; JHEP 9712 (1997) 002, [hep-th/9711053](#).
- [6] Hiroshi Ooguri, Andrew Strominger, Cumrun Vafa: Black Hole Attractors and the Topological String; Phys.Rev. D70 (2004) 106007 [arXiv:hep-th/0405146 v2](#).
- [7] G. L. Cardoso, B. de Wit, J. Käppeli, T. Mohaupt: Examples of stationary BPS solutions in N=2 supergravity theories with  $R^2$ -interactions; Fortsch.Phys. 49 (2001) 557-563, [hep-th/0012232](#).
- [8] G. L. Cardoso, B. de Wit, J. Käppeli, T. Mohaupt: Stationary BPS Solutions in N=2 Supergravity with  $R^2$ -Interactions; JHEP 0012 (2000) 019, [hep-th/0009234](#).
- [9] Gabriel Lopes Cardoso, Bernard de Wit, Thomas Mohaupt: Deviations from the Area Law for Supersymmetric Black Holes; Fortsch.Phys. 48 (2000) 49-64, [hep-th/9904005](#).
- [10] Thomas Mohaupt: Black Hole Entropy, Special Geometry and Strings; Fortsch.Phys. 49 (2001) 3-161, [hep-th/0007195](#).
- [11] Ashoke Sen: Black Hole Entropy Function, Attractors and Precision Counting of Microstates; [arXiv:0708.1270v3 \[hep-th\]](#).
- [12] H. K. Kunduri, J. Lucietti and H. S. Reall: Near horizon symmetries of extremal black holes; [arXiv:0705.4214 \[hep-th\]](#).
- [13] M. Cvetič and D. Youm: Entropy of Non-Extreme Charged Rotating Black Holes in String Theory; Phys. Rev. D 54, 2612 (1996) [arXiv:hep-th/9603147](#).
- [14] Dumitru Astefanesei, Kevin Goldstein, Rudra P. Jena, Ashoke Sen, Sandip P. Trivedi: Rotating Attractors, TIFR/TH/06-15, HRI-P-06-06-002; JHEP 0610 (2006) 058, [arXiv:hep-th/0606244v2](#).
- [15] R. Kallosh, N. Sivanandam and M. Soroush: The Non-BPS Black Hole Attractor Equation; JHEP 0603, 060 (2006), [arXiv:hep-th/0602005](#).
- [16] Mohammad R. Garousi, Ahmad Ghodsi: Entropy Function for Non-extremal D1D5 and D2D6NS5-branes [arXiv:0705.2149v2 \[hep-th\]](#).
- [17] Rong-Gen Cai, Da-Wei Pang: Entropy Function for Non-Extremal Black Holes in String Theory [arXiv:hep-th/0701158v2](#).
- [18] M. R. Garousi and A. Ghodsi: On attractor mechanism and entropy function for non extremal black holes/branes; JHEP 04, 043 (2007) [arXiv:hep-th/0703260](#).

- [19] A. Fotopoulos, T.R. Taylor: Remarks on Two-Loop Free Energy in N=4 Supersymmetric Yang-Mills Theory at Finite Temperature Phys.Rev. D59 (1999) 061701 [arXiv:hep-th/9811224v3](#) .
- [20] Alain Connes: Noncommutative geometry, Academic Press; <http://www.alainconnes.org/downloads.html>.
- [21] Bhupendra Nath Tiwari: On Generalized Uncertainty Principle; [arXiv:0801.3402](#).
- [22] Edward Witten: Reflections on the Fate of Spacetime; Physics Today, page 24, April 1996. <http://www.sns.ias.edu/~witten/papers/Reflections.pdf>.
- [23] Edward Witten: Duality, Spacetime and Quantum Mechanics; Physics Today, page 28 May 1997. <http://www.sns.ias.edu/~witten/papers/duality.pdf>.
- [24] D. J. Gross and P. F. Mende: Nucl. Phys. B 303, 407 (1988) et Phys.Lett. B 197 (1987) 129.
- [25] K. Konishi, G. Pauti and P. Provero: Phys. Lett. B 234, 276 (1990).
- [26] D. Amati, M. Ciafaloni and G.Veneziano: Phys.Lett. B 197 (1987) 81.
- [27] G. Veneziano: Europhys. Lett. 2, 199 (1986).
- [28] M. Maggiore: A Generalized Uncertainty Principle in Quantum Gravity Phys. Lett. B 304, 65 (1993) [arXiv:hep-th/9301067](#).
- [29] H. S. Snyder: Phys. Rev. 71, 38 (1947).
- [30] Edward Witten: On background-independent open-string field theory; Phys. Rev. D 46, 5467 - 5473 (1992), DOI: 10.1103/PhysRevD.46.5467.
- [31] Edward Witten: Some computations in background-independent off-shell string theory; Phys. Rev. D 47, 3405 (1993), DOI: 10.1103/PhysRevD.47.3405.
- [32] S. S. Gubser and I. Mitra: Instability of charged black holes in anti-de Sitter space [hep-th/0009126](#).
- [33] S. S. Gubser and I. Mitra: The evolution of unstable black holes in anti-de Sitter space JHEP 0108 (2001) 018 [hep-th/0011127](#) ,
- [34] A. Strominger and C. Vafa: Microscopic Origin of the Bekenstein-Hawking Entropy; Phys. Lett. B379, 99 (1996), [hep-th/9601029](#).
- [35] O. Aharony, S. S. Gubser, J. Maldacena, H. Ooguri, and Y. Oz: Large N Field Theories, String Theory and Gravity; Phys. Rept. 323, 183 (2000), [hep-th/9905111](#).
- [36] E. Witten: Anti De Sitter Space And Holography; Adv. Theor. Math. Phys. 2, 253 (1998), [hep-th/9802150](#)
- [37] Jan de Boer, Liat Maoz, Asad Naqvi: Some Aspects of the AdS/CFT Correspondence; [arXiv:hep-th/0407212](#).
- [38] Jan de Boer, Andrea Pasquinucci, Kostas Skenderis: AdS/CFT dualities involving large 2d N=4 superconformal symmetry; Adv.Theor.Math.Phys. 3 (1999) 577-614, [arXiv:hep-th/9904073](#).
- [39] Samir D. Mathur: The quantum structure of black holes; Class.Quant.Grav. 23 (2006) R115, [arXiv:hep-th/0510180](#).

- [40] Samir D. Mathur, Ashish Saxena, Yogesh K. Srivastava: Constructing "hair" for the three charge hole; Nucl.Phys. B680 (2004) 415-449, [arXiv:hep-th/0311092](#).
- [41] S. S. Gubser: Thermodynamics of spinning D3-branes Nucl. Phys. B551, 667 (1999), [hep-th/9810225](#).
- [42] C. Csaki, H. Ooguri, Y. Oz, and J. Terning: Glueball Mass Spectrum From Supergravity; JHEP 01, 017 (1999), [hep-th/9806021](#).
- [43] R. Gregory and R. Laflamme: Black Strings and p-Branes are Unstable; Phys. Rev. Lett. 70, 2837 (1993), [hep-th/9301052](#).
- [44] G. Ruppeiner, Rev. Mod. Phys **67** (1995) 605, Erratum **68** (1996) 313.
- [45] Jan E. Aman, Narit Pidokrajt, Geometry of Higher-Dimensional Black Hole Thermodynamics Report-no: USITP 05-05 Phys.Rev. D73 (2006) 024017, [hep-th/0510139](#).
- [46] Tapobrata Sarkar, Gautam Sengupta, Bhupendra Nath Tiwari: On the Thermodynamic Geometry of BTZ Black Holes; JHEP 0611 (2006) 015, [hep-th/0606084](#).
- [47] Tapobrata Sarkar, Gautam Sengupta, Bhupendra Nath Tiwari: Thermodynamic Geometry and Extremal Black Holes in String Theory; [ Dans la communication ].
- [48] Kerson Huang: Statistical Mechanics; Wiley; 2 edition.
- [49] K Pathria: Statistical Mechanics, Butterworth-Heinemann; 2 edition.
- [50] F. Weinhold, J. Chem. Phys **63** (1975) 2479.
- [51] M. H. Dehghani, H. KhajehAzad: Thermodynamics of a Kerr Newman de Sitter Black Hole, Can.J.Phys. 81 (2003) 1363, [hep-th/0209203](#).
- [52] J. Y. Shen, R. G. Cai, B. Wang, R. K. Su: Thermodynamic geometry and critical behavior of black holes; Int.J.Mod.Phys. A22 (2007) 11-27, [gr-qc/0512035](#).
- [53] J. D. Bekenstein: Black holes and entropy; Phys. Rev. D 7, 2333 (1973).
- [54] S. W. Hawking: Particle creation by black holes; Commun. Math. Phys. 43, 199 (1975).
- [55] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking: The four laws of black hole mechanics, Commun. Math. Phys. 31, 161 (1973).
- [56] Michael B. Green, John H. Schwarz, Edward Witten: Superstring Theory, Vol: 1,2;(Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- [57] Joseph Polchinski: String Theory: Vol.1: An Introduction to the Bosonic String, Vol. 2: Superstring Theory and Beyond. (Cambridge Monographs on Mathematical Physics).
- [58] Ashoke Sen: Stretching the Horizon of a Higher Dimensional Small Black Hole; JHEP 0507 (2005) 073, [arXiv:hep-th/0505122](#).
- [59] Ashoke Sen: How Does a Fundamental String Stretch its Horizon? JHEP 0505 (2005) 059, [arXiv:hep-th/0411255](#) .

- [60] Gary Horowitz, Andrew Strominger: Counting States of Near-Extremal Black Holes Phys.Rev.Lett. 77 (1996) 2368-2371, [arXiv:hep-th/9602051](#).
- [61] S. Gukov, C. Gukov, E. Witten: CFT's From Calabi-Yau Four-folds; Nucl.Phys. B584 (2000) 69-108; Erratum-ibid. B608 (2001) 477-478, [arXiv:hep-th/9906070](#).
- [62] Atish Dabholkar: Exact Counting of Black Hole Microstates; Phys.Rev.Lett. 94 (2005) 241301, [arXiv:hep-th/0409148v2](#).
- [63] S. Ferrara, G. W. Gibbons, R. Kallosh: Black Holes and Critical Points in Moduli Space; Nucl. Phys. **B500** (1997) 75, [hep-th/9702103](#).
- [64] J. E. Aman, I. Bengtsson, N. Pidokrajt: Flat Information Geometries in Black Hole Thermodynamics; Gen.Rel.Grav. 38 (2006) 1305-1315, [gr-qc/0601119](#)
- [65] J. E. Aman, N. Pidokrajt: Geometry of Black Hole Thermodynamics; Gen. Rel. Grav. **35** (2003) 1733, [gr-qc/0304015](#).
- [66] G. Arcioni, E. Lozano-Tellechea: Stability and Critical Phenomena of Black Holes and Black Rings; Phys.Rev. D72 (2005) 104021, [hep-th/0412118](#).
- [67] Ahmad Sheykhi: Thermodynamics of charged topological dilaton black holes; [arXiv:0709.3619](#).
- [68] P.K. Townsend: Black Holes; [arXiv:gr-qc/9707012v1](#). Lecture notes for a 'Part III' course 'Black Holes' given in DAMTP, Cambridge.
- [69] A. Chamblin, R. Emparan, C. V. Johnson, and R. C. Myers: Charged AdS Black Holes and Catastrophic Holography; Phys. Rev. D60, 064018 (1999), [hep-th/9902170](#).
- [70] B. de Wit and H. Nicolai: Nucl. Phys. B281, 211 (1987).
- [71] M. Cvetič and S. S. Gubser: Thermodynamic Stability and Phases of General Spinning Branes; JHEP 07, 010 (1999), [hep-th/9903132](#).
- [72] Kourosh Nozari and S. Hamid Mehdipour: Gravitational Uncertainty Principle and Black Hole Remnants: Mod. Phys. Lett. A 20, 38(2005) 2937-2948.
- [73] L. Garay: Quantum gravity and minimum length; Int. Jour. Mod. Phys. A 10 (1995) 145, [arXiv:gr-qc/9403008](#).
- [74] A. Kempf, G. Mangano: Minimal Length Uncertainty and Ultraviolet Regularization; Phys.Rev. D55 (1997) 7909-7920 [arXiv:hep-th/9612084](#).
- [75] Giovanni Amelino-Camelia, Jerzy Lukierski, Anatol Nowicki:  $\kappa$ - Deformed Covariant Phase Space and Quantum-Gravity Uncertainty Relations; Phys.Atom.Nucl. 61 (1998) 1811-1815; Yad.Fiz. 61 (1998) 1925-1929, [arXiv:hep-th/9706031](#).
- [76] Myungseok Yoon, Jihye Ha, Wontae Kim: Entropy of Reissner-Nordstrom Black Holes with Minimal Length Revisited; [arXiv:0706.0364 v1](#).
- [77] G. t'Hooft; Nucl. Phys. B 265, 727 (1985).
- [78] Wontae Kim, John J. Oh: Determining the Minimal Length Scale of the Generalized Uncertainty Principle from the Entropy-Area Relationship [arXiv:0709.0581v1 \[hep-th\]](#) .

- [79] Robert M. Wald: Black Hole Entropy is Noether Charge Phys.Rev. D48 (1993) 3427-3431, [gr-qc/9307038](#).
- [80] Vivek Iyer, Robert M. Wald: Some Properties of Noether Charge and a Proposal for Dynamical Black Hole Entropy Phys.Rev. D50 (1994) 846-864, [gr-qc/9403028](#).
- [81] Robert M. Wald: Gravitation, Thermodynamics, and Quantum Theory Class.Quant.Grav. 16 (1999) A177-A190, [gr-qc/9901033](#).
- [82] J. R. David, D. P. Jatkar and A. Sen: Dyon spectrum in generic  $N = 4$  supersymmetric  $Z(N)$  orbifolds; JHEP 0701 (2007) 016, [arXiv:hep-th/0609109](#).
- [83] Bindusar Sahoo, Ashoke Sen: Higher Derivative Corrections to Non-supersymmetric Extremal Black Holes in  $N=2$  Supergravity, JHEP 0609 (2006) 029, [arXiv:hep-th/0603149v2](#).
- [84] G. T. Horowitz and D. L. Welch: Exact Three Dimensional Black Holes in String Theory; Phys. Rev. Lett. 71, 328 (1993) [arXiv:hep-th/9302126](#).
- [85] K. Sfetsos and K. Skenderis: Gauge Invariance of  $QED_{2+1}$ ; Nucl. Phys. B 517, 179 (1998), [arXiv:hep-th/9711137](#)
- [86] J. M. Bardeen and G. T. Horowitz: The extreme Kerr throat geometry: A vacuum analog of  $AdS_2 \times S^2$ ; Phys. Rev. D 60, 104030 (1999) [arXiv:hep-th/9905099](#).
- [87] D. Rasheed: The rotating dyonic black holes of kaluza-klein theory; Nucl. Phys.B 454 (1995) 379401, [arXiv:hep-th/9505038](#).
- [88] F. Larsen: Rotating kaluza-klein black holes; Nucl. Phys. B575 (2000) 211230, [arXiv:hep-th/9909102](#).
- [89] Bhupendra Nath Tiwari: Geometric Perspective of Entropy Function: Embeddings, Spectrum and Convexity; [Au titre de la publication et pour figurer sur l'arXiv.org].